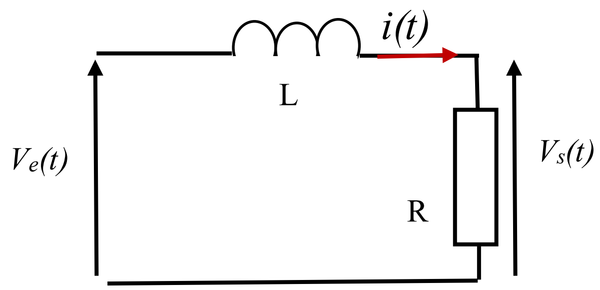
Correction travaux dirigés N° 5

Fonction de transfert

Exercice 1

1. **Calcul de la fonction du transfert du circuit RL**



$$v_e(t) = \frac{Ldi(t)}{dt} + v_s(t) \qquad (1)$$

$$i(t) = \frac{v_s(t)}{R} \qquad (2)$$

En remplaçant 2 dans 1 ; on obtient ;

$$v_e(t) = \frac{L}{R}\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) \qquad (3)$$

En appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles ; on obtient :

$$V_e(p) = \frac{L}{R}pV_s(p) + V_s(p) = (\frac{L}{R}p + 1)V_s(p)$$

$$\Rightarrow \ H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}p} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Avec $\frac{L}{R} = \tau$ constante du temps.

2. **Réponse indicielle**

Dans ce cas $v_e(t) = u(t)$ (échelon unité)

$$\Rightarrow V_e(p) = \frac{1}{p}$$

$$et\ V_s(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+\frac{L}{R}p}\right) = \frac{R/L}{p(p+\frac{R}{L})}$$

Pour avoir la réponse indicielle $v_s(t)$ on décompose l'expression de $V_s(p)$ en éléments simples comme suite :

$$V_s(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{R}{L}}$$

Avec

$$A = \lim_{p\to 0}(pV_s(p)) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{R/L}{p(p+\frac{R}{L})}\right) = 1$$

$$B = \lim_{p\to -\frac{R}{L}}\left((p+\frac{R}{L})V_s(p)\right) = \lim_{p\to 0}\left((p+\frac{R}{L})\frac{R/L}{p(p+\frac{R}{L})}\right) = -1$$

$\Rightarrow$

$$V_s(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{R}{L}}$$

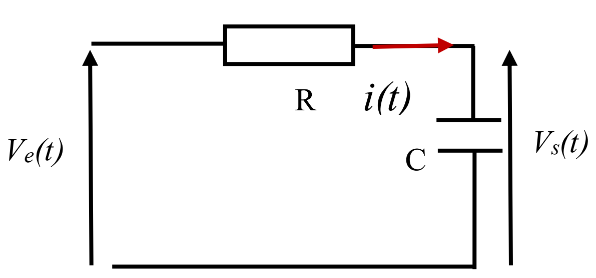
$$\Rightarrow\ v_s(t) = (1-e^{-\frac{R}{L}t})u(t)$$

3. Réponse impulsionnelle

$$h(t) = \frac{dv(t)}{dt} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Exercice 2

- **Circuit 1**



$$v_e(t) = Ri(t) + v_s(t) \qquad (1)$$

$$i(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt} \qquad (2)$$

En remplaçant 2 dans 1 ; on obtient ;

$$v_e(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) \qquad (3)$$

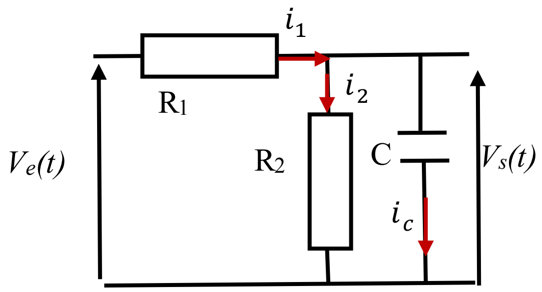
En appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles ; on obtient :

$$V_e(p) = RCpV_s(p) + V_s(p) = (RCp + 1)V_s(p)$$

$$\Rightarrow \; H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Avec $RC = \tau$ constante du temps.

- **Circuit 2**



$$v_e(t) = R_1 i_1(t) + v_s(t) \qquad (1)$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_c(t) = \frac{v_s(t)}{R_2} + C\frac{dv_s}{dt} \qquad (2)$$

En remplaçant 2 dans 1 ; on obtient ;

$$v_e(t) = R_1\frac{v_s(t)}{R_2} + R_1 C\frac{dv_s}{dt} + v_s(t)$$
$$= \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)v_s(t) + R_1 C\frac{dv_s(t)}{dt} \qquad (3)$$

En appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles ; on obtient :

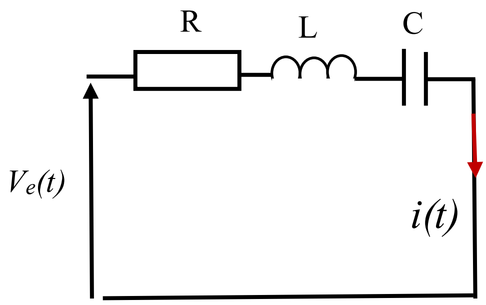
$$V_e(p) = \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)V_s(p) + R_1 CpV_s(p) = (\frac{R_1}{R_2} + 1 + R_1 Cp)V_s(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + R_1Cp} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_2} + R_1Cp} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + \frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}Cp}$$
$$= \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec $\frac{R_1R_2}{R_2+R_1}C = \tau$, constante du temps.

$\frac{R_2}{R_1+R_2} = K$, gain

- **Circuit 3**



$$H(p) = \frac{I(p)}{V_e(p)}$$

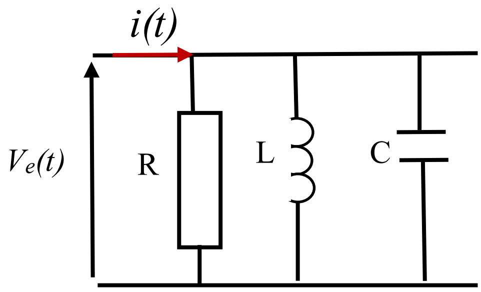
$$v_e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (1)$$

En appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles ; on obtient :

$$V_e(p) = RI(p) + Lp\,I(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = (R + Lp + \frac{1}{Cp})I(p)$$

$$H(p) = \frac{I(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}$$

- **Circuit 4**



$$i(t) = \frac{v_e(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v_e(t)dt + C\frac{dv_e(t)}{dt} \qquad (1)$$

En appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles ; on obtient :

$$I(p) = \frac{1}{R}V_e(p) + \frac{1}{Lp}V_e(p) + CpV_e\,(p) = (\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp} + Cp)V_e(p)$$

$$H(p) = \frac{I(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp} + Cp}$$