Université BADJI Mokhtar Annaba
Faculté des sciences de l'ingéniorat
Département d'électronique

SOLUTION EXAMEN PROCESSUS STOCHASTIQUES
MASTER 1 ST
DUREE : 1 HEURE

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur {0,1,...,a}, où a ∈ N. On suppose que E(X)=2. Alors a est égale.
a =1
a=2
a=3
a=4
Précisions supplémentaires
La loi est uniforme donc sa fonction de densité de probabilité qui est discrète doit être la même pour toutes les valeurs de X. D'autre part, comme X prend des valeurs de 0 à a par pas de 1, alors la fonction de densité de probabilité doit avoir toujours l'amplitude 1/(a+1) pour que sa somme soit égale à 1.

E(X) = 0×1/(a+1) +1×1/(a+1) + 2×1/(a+1) + 3×1/(a+1) + …. + a×1/(a+1) = 2 ⇒ a=4

Vérification pou a=4
E(X) = 0×1/5 +1×1/5 + 2×1/5 + 3×1/5 + 4×1/5 = [1 + 2 +3 +4]/5 = 10/5 = 2

2. Les variables aléatoires X et Y indépendantes ont respectivement des variances de 0,2 et 0,5. Soit Z= 5X-2Y+5. La variance de Z est
a) 3
b) 4
c) 5
d) 7

Précisions supplémentaires
Rappelons la propriété d'une variance, où a et b sont deux constantes, à sav $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$
D'autre part, si deux variables aléatoires sont indépendantes la variance de leur somme est égale à la somme de leur variance. Donc nous avons: $Var(aX + cY + b) = a^2 Var(X) + c^2 Var(Y)$, où a, b et c sont des constantes.
$Var(Z) = 5^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.5 = 5 + 2 = 7$

3. Soit X une variable aléatoire de fonction de distribution de probabilité
f (x)=0.2 pour |x|<1
f(x)=0,1 pour 1 < |x| < 4,
sinon = 0 ailleurs
La probabilité P (0,5 < x < 5) est
a) 0,3
b) 0,5
c) 0,4
d) 0,8

Précisions supplémentaires
Il suffit d'intégrer f(x) entre 0.5 et 4 (au lieu de 5, car au-delà de 4, f(x) est nulle). En sachant que f(x) vaut 0.2 entre 0.5 et 1 et elle vaut 0.1 entre 1 et 4. On obtient finalement 0.4.

4. Une variable aléatoire suit la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.6	-0.2p	$0.2p^2$

Quelle est la valeur p pour avoir une loi de probabilité ?

Solution
Une loi de probabilité doit toujours être positive ou nulle. Sa somme doit être égale à 1
Donc la valeur p doit être négative dans ce cas pour que $P(X=x_i)$ soit toujours non négative. De plus la somme de toutes les valeurs de $P(X=x_i)$ soit égale à 1, c'est-à-dire $0.6-0.2p+0.2p^2 = 1 \Rightarrow p = -1$

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.6	0.2	0.2

Calculez E(X)

Solution : E(X) = 1×0.6 + 2×0.2 + 3×0.2 = 0.6 + 0.4 + 0.6 = 1.6

Calculez l'écart type σ(X)

Solution : VAR(X) = $(1\text{-}1.6)^2$×0.6 + $(2\text{-}1.6)^2$×0.2 + $(3\text{-}1.6)^2$×0.2 = 0,36×0.6 + 0.16×0.2 + 1,96×0.2 = 0,216 + 0,032 + 0,392 = 0,64

σ(X) = √VAR(X) = 0.80

5. Soit $f(x) = 4e^{-3x}$, définie sur [0, +∞[
Peut elle être une fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X? **Oui** ou Non

Justifiez :
f(x) est toujours positive entre [0, +∞[ce qui vérifie la première propriété d'une function de densité de probabilité

de plus son intégrale entre [0, +∞[est égale à 1, qui est la deuxième propriété d'une fonction de densité de probabilité ⇒le calcul de cette intégrale nous donne bien 1

F(1) est égale à
0.9802
0.9910
0.9817
0.9789

Précisions supplémentaires:
$F(X=x_i)$ qui est la fonction de répartition est égale à l'intégrale de f(x) entre -∞ et x_i

$$F(1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 4e^{-3x}dx = -\frac{4}{4}e^{-4x}\Big|_0^1 = -e^{-4} + 1 = -0.0183 + 1 = 0.9817$$

P(1 <*X* < 2) est égale à

0.01798
0.01898
0.01698
0.01998

Précisions supplémentaires:

$$P(1 < X < 3) = \int_1^2 f(x)dx == -\frac{4}{4}e^{-4x}\Big|_1^2 = -e^{-8} + e^{-4} = -0.000335 + 0.018315 = 0,01798$$

.6Soit un processus aléatoire X(t) avec une fonction d'autocorrélation donnée ci-dessous:

$$R_X(t, t+\tau) = 36 + 25\exp(|\tau|)$$

S'agit-il d'un processus stationnaire au sens large ?
Oui
Non
Expliquez :
Sa fonction d'autocorrélation ne dépend pas du temps mais dépend uniquement de τ qui la différence entre deux instants correspondant chacun à l'instant où une variable aléatoire du processus

Quelle est sa variance?
25
36
61
Aucune des réponses précédentes n'est correcte
Précisions supplémentaires:
La variance d'un processus c'est la puissance de ses fluctuations et non de sa composante continue (ou valeur moyenne). Donc on ne tient pas compte, pour le calcul de la variance, de la constante 36 qui apparait dans sa fonction de corrélation.

Quelle est sa puissance totale moyenne?
25
36
61
Aucune des réponses précédentes n'est correcte

Précisions supplémentaires
Quant la puissance totale on tient compte de tout (la puissance des fluctuations et aussi de la composante continue) donc à partir de la fonction de corrélation nous pouvons déduire que la puissance totale est égale à : Pxx = Rxx(0)36 + 25 = 61

7. Un bruit blanc avec une DSP constante égale à $N_0/2=6\mu W/Hz$ est un appliqué à un filtre passe-bas idéal de bande passante notée BP, que l'on considère ici en Hertz. Si la puissance moyenne totale du signal obtenu à la sortie de ce filtre est égale à 15 Watts, la BP est donc égale à :

Solution :
La puissance totale d'un signal est égale à l'intégrale de -∞ à +∞ de sa DSP. Mais comme il s'agit d'un filtre passe-bas idéal, sa sortie sera limitée en fréquence entre –BP et BP. A l'intérieur de cette bande passante la DSP est constante égale à N_0= 6µW/Hz. Donc l'intégrale de la DSP c'est l'intégrale de N_0 sera entre –BP et BP. Ce qui donne :
Puissance totale de la sortie du filtre = $N_0 \times 2BP$ = 15 Watts
$= 6\times10^{-6} \times 2BP = 15$ Watts $\Rightarrow BP = 15/(12\times10^{-6}) = 5/3 \times 10^6$ Hz = 5/3 MHz

8. Un processus aléatoire est appliqué à l'entrée d'un système dont la réponse impulsionnelle est donnée par $h(t)=t^2e^{-8t}$ pour $t\geq0$ et 0 ailleurs. Si $E[X(t)]=2$, alors l'espérance mathématique de la sortie Y est :
1/128
1/64
3/128
1/32
Précisions supplémentaires
E(Y) est égale à l'intégrale de h(t) entre -∞ et +∞. En effectuant cette intégrale on trouve le résultat 3/128

9. Soit X (t) un processus stationnaire au sens large (WSS) avec la fonction d'autocorrélation :
$R_X(\tau) = 1 + \delta(\tau)$. Supposons que X(t) est l'entrée d'un système SLIT avec une réponse impulsionnelle :
$h(t) = e^{-t}$ définie uniquement pour $t\geq0$. Soit y (t) la sortie.

- Trouver $S_X(f)$

Solution : $S_x(f) = TF(R_x(\tau)) = \delta(f) + 1$.

- Trouver $S_Y(f)$

Solution : $S_y(f) = Sx(f)\times|H(f)|^2 = (\delta(f) + 1) \times |TF[e^{-t}]|^2$

- Trouver $R_Y(\tau)$

Solution : 3
$Ry(\tau) = TF^{-1}[Sy(f)]$

10. Soit X (t) un processus aléatoire gaussien stationnaire du second ordre ou WSS de moyenne nulle avec

$$R_X(\tau) = e^{-\pi\tau^2}$$

Supposons que X(t) est l'entrée d'un SLIT avec une réponse fréquentielle :

$$|H(f)| = e^{-\frac{3}{2}\pi f^2}.$$

Soit Y (t) la sortie.

- Trouver m_Y

Solution : Comme le signal d'entrée du SLIT est de moyenne nulle alors la sortie aussi sera de moyenne nulle.

- Trouver $R_Y(\tau)$ et Var(Y(t))

Solution :

Pour un SLIT dont l'entrée est un processus aléatoire WSS nous avons la relation

$Sy(f) = Sx(f) \times |H(f)|^2$

Avec $Sx(f) = TF(Rx(\tau))$

$Sy(f) = TF(Ry(\tau))$

Var(Y(t)) = Ry(0) car il n'y a la moyenne est nulle

11. La convolution de ces deux séquences x1(n)={1, 2, 3} et x2(n) = {3, 2, 1} donne

y(n) ={1, 2, 3, 2, 1}

y(n) ={3, 8, 14, 8, 3}

y(n) ={3,12, 36, 12, 3}

y(n) ={4, 4, 4, 4, 4}

12. Quel est le résultat y(t) causal de la convolution de ces deux fonctions causales, $x(t)=e^{-t}$ et $h(t)=e^{-2t}$

$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

$y(t) = e^{-2t} - e^{-2t}$

$y(t) = e^{-t} + e^{-2t}$

$y(t) = e^{t} + e^{2t}$

Précisions supplémentaires

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) . e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$= f_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} . d\tau ; t \geq 0 = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau$$

$$= e^{-2t} \left(e^t - 1\right) ; t \geq 0$$

En sachant que y(t) est causal

$\therefore y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t)$

où u(t) est l'échelon unitaire qui vaut 1 pout t postif et 0 ailleurs

13. Soit x(t)=sin(π/4 t) et y(t)=cos(π/4 t), quel est le résultat de la convolution de ces deux fonctions

0.5sin(π/4 t),

4sin(π/4 t)

0.5cos(π/4 t)

$\cos(\pi/4\ t)$

Précisions supplémentaires

A l'aide des règles trigonométriques du sinus et du cosinus nous pouvons écrire x(t) et y(t) comme suit :

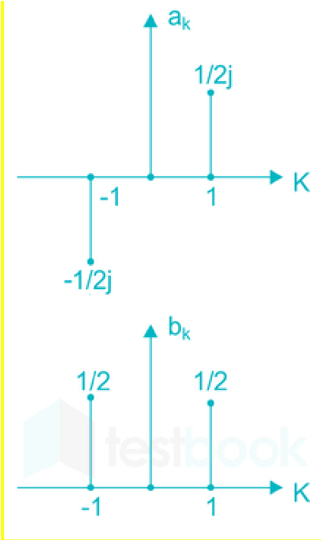
$$x(t) \leftrightarrow \frac{e^{j\frac{\pi}{4}t} - e^{-j\frac{\pi}{4}t}}{2j}$$

$$y(t) \leftrightarrow \frac{e^{j\frac{\pi}{4}t} + e^{-j\frac{\pi}{4}t}}{2}$$

Le produit de convolution à calculer est le suivant :

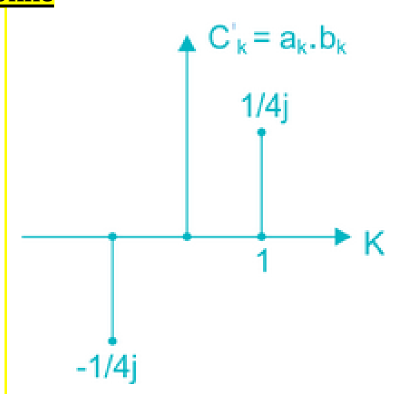
$$z(t) = x(t) \star y(t)$$

Dans le domaine fréquentiel il devient une multiplication simple entre des Diracs car chaque exponetiel complexe dans le domaine temporel est un Dirac dans le domaine fréquentiel positionné à la fréquence de l'exponentiel, soit



Où a_k et b_k sont respectivement le spectre de x(t) et de y(t).

Le produit de ces deux spectres nous donne



La $TF^{-1}(a_k b_k)$ va nous donner le résultat dans le domaine temporel, soit :

$$= \left(\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}\right)\left(e^{j\frac{\pi}{4}t} - e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right)\frac{1}{4j}$$

$$\Rightarrow z(t) = 8\left(\frac{1}{4j}\right)\left(2j\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) \Rightarrow z(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

14. Un signal analogique a une bande passante de 5KHz. Si nous utilisons une DFT à N points pour calculer le spectre .du signal avec une résolution inférieure ou égale à 25Hz. Trouvez la longueur minimale du signal

0.2s, **0.04s,** 0.02s, 0s ou bien aucune de ces valeurs ne convienne

Précisions supplémentaires :

Étant donné une bande passante = 5 KHz. N = 2^m, où m est l'entier La longueur minimale du signal (T) est donnée par : T = L/Fe

Où, L est le nombre minimum d'échantillons requis Fe est la fréquence d'échantillonnage minimal respectant la condition de Shannon soit : Fe = 2fm avec fm représentant la fréquence maximale du signal ou bien sa bande passante

Cela signifie que la fréquence d'échantillonnage est le double de la bande passante.

Fe = 2 x 5 = 10 KHz.

L = Fe/Résolution

Donc, T = (Fe/ Résolution)/ Fs

T = 1/Fe

T = 1/25Hz

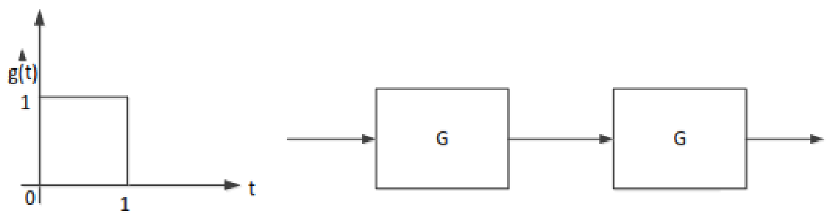
T = 0,04 s

15. Si l'entrée d'un système linéaire uniquement, est doublée, qu'arrive-t-il à la sortie
la sortie n'est pas modifiée
la sortie est doublée
la sortie change de signe
aucun des autres choix n'est correct

16. Si l'entrée d'un système invariant uniquement, est doublée, qu'arrive-t-il à la sortie
la sortie n'est pas modifiée
la sortie est doublée
la sortie change de signe
aucun des autres choix n'est correct

17. Considérons un système analogique avec une entrée x (t) et une sortie y (t) données par y(t)=x(t)cos(t)
Ce système est
(A) linéaire et invariant dans le temps
(B) non linéaire et invariant dans le temps
(C) linéaire et variable dans le temps
(D) non linéaire et variable dans le temps

18. La réponse impulsionnelle g(t) d'un système, G, est comme le montre la figure (a). Quelle est la valeur maximale atteinte par la réponse impulsionnelle de deux blocs en cascade de G comme le montre la figure (b) ? A quel instant cette valeur maximale est atteinte? Si l'entrée x(t)=g(t) quelle sera la sortie y(t)?



Solution :6

Il s'agit de deux blocs identiques ayant la même réponse impulsionnelle qui est sous forme d'une fenêtre rectangulaire (Rect) de durée égale à 1 et retardée de 0.5, c'est-à-dire g(t) = rect(t-0.5). Quand deux SLIT sont en cascade (ou en série) alors la réponse impulsionnelle résultante est la convolution des deux réponses impulsionnelles, soit :

$$G_{resultante}(t) = rect(t-0.5) * rect(t-0.5) = Tri(t-1)$$

Donc c'est une impulsion triangulaire de durée totale égale à 2 et limitée dans le temps entre 0 et 2. Son maximum égale à 1 est atteint à t=1.

Si x(t) = g(t) alors la sortie y(t) = rect(t-0.5)*Tri(t-1)

19. Soit un SLIT avec fonction de transfert H(p)=1/[p(p+4)]. Si l'entrée du système est cos(3t) et que la sortie en régime permanent est Asin(3t+α), alors la valeur de A est
(a) 1/30
(b) 1/15
(c) 3/4
(d) 4/3
(e) ou bien aucune des valeurs précédentes ne conviennent

Précisions supplémentaires:
Le signal appliqué à l'entrée du SLIT est cos(3t) donc sa fréquence est égale à 3/(2π) Hz ou bien sa pulsation est égale à ω=3. Pour cette fréquence (ou pour cette pulsation) le SLIT nous donne comme gain = H(jω)=H(j3)=1/[3j(3j+4)]. D'où un module du gain pour cette fréquence égal à |H(j3|=1/[3×5] = 1/15

20. Un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) avec une réponse impulsionnelle h(t) produit une sortie y(t) lorsque l'entrée x(t) est appliquée. Lorsque l'entrée x(t-τ) est appliquée à un système avec une réponse impulsionnelle h(t-τ), la sortie sera
(a) $y(t)$
(b) $y(2(t-\tau))$
(c) $y(t-\tau)$
(d) $y(t-2\tau)$
(e) sinon quelle est l'expression de la sortie?