<u>TD 1:</u>
Introduction à l'optimisation, Formalisation de problèmes sous forme d'un programme linéaire (PL).
Formes matricielle, canonique et standard d'un PL.

<u>Rappel :</u>

A) Un problème d'optimisation peut être de type:

- Linéaire (Programme linéaire ou PL): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, et les variables de décision sont continues;
- Non Linéaire (Programme non linéaire ou PNL): la fonction objectif ou les contraintes sont non linéaires, et les variables de décision sont continues;
- Linéaire en nombres entiers (Programme Linéaire en Nombres Entiers PLNE): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, et les variables de décision sont entières.
- Non Linéaire en nombres entiers (Programme Non Linéaire en Nombres Entiers PNLNE): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires, et les variables de décision sont entières.
- Linéaire mixte en nombres entiers (PLMNE): la fonction objectif et les contraintes sont linéaires. Les variables de décision sont scalaires; certaines d'entre elles sont des entiers tandis que d'autres sont des variables continues.
- Non Linéaire mixte en nombres entiers (PNLMNE): est un PNL impliquant des variables de décision entières et continues.
- Stochastique (appelée aussi optimisation sous incertitudes ou PS) la fonction objectif ou les contraintes dépendent de variables aléatoires, de sorte que l'optimum est trouvé dans un certain sens "attendu" ou probabiliste. Elle implique souvent les types d'optimisation ci-dessus comme sous-catégories.
- Commande Optimale (CO): détermination d'une commande d'un *système dynamique* sur une période de temps qui minimise ou (maximise) un critère de performance (i.e., une fonction objectif), éventuellement sous des contraintes pouvant porter sur la commande ou sur l'état du système.

B) Le degré de liberté d'un problème d'optimisation est le nombre de variables de décision qui peuvent être changées afin d'obtenir la valeur optimale de la fonction objectif, i.e., c'est le nombre de variables de décisions moins le nombre de contraintes d'optimisation avec égalité.

<u>Exercice 1:</u>

Pour chaque problème d'optimisation ci-dessous, indiquez son degré de liberté et son type (PL, PNL, PLNE, PNLNE, PLMNE et PNLMEN):

1.

$\max f(x, y) = 3x + 4y$
sujet à :
$x + 4y - z \leq 10$
$y + z \geq 6$
$x - y \leq 3$

2.

$$\min f(x, y) = 3.x^2 + 4.\sin(y.z)$$
sujet à:
$$x + 4y \leq 10$$
$$y + z = 6 + \pi$$
$$x - y \leq 3$$
$$z \in \{0, \pi/2, \pi\}$$

3.

$$\min 4.35.x^2.y_1 + 1.74.x.z.y_2 - 2.5.k.y_3$$
sujet à:
$$x - z + k \leq 10$$
$$y_1 + y_2 \leq 1$$
$$y_2 \leq y_3$$
$$x \leq 8$$
$$k \leq 7$$
$$x, k \geq 0$$
$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

4.

$$\min \quad \sigma^2_{R_B} = \int_0^1 (R_B - \overline{R_B})^2 dF$$
$$\text{s.t.} \quad \overline{\mathrm{R_B}} = \int_\theta^1 R_B(\theta, x, u) dF$$
$$C_A = \frac{C_{A_i}}{1 + k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT} \cdot \tau}$$
$$C_B = \frac{C_{B_i} + k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT} \cdot \tau \cdot C_A}{1 + k_B^0 \cdot e^{-E_B/RT} \cdot \tau}$$
$$-r_A = k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT}$$
$$-r_B - k_B^0 \cdot e^{-E_B/RT} - k_A^0 \cdot e^{-E_A/RT}$$
$$Q = F\rho C_p \cdot (T - T_i) + V \cdot (r_A H_{RA} + r_B H_{RB})$$
$$\tau = V/F$$
$$R_B = r_b \cdot V$$

où θ désigne les variables de commande correspondant aux degrés de liberté, x sont les variables d'état égales au nombre de contraintes d'égalité, et u représente les incertitudes associées.

<u>Solution 1:</u>

Problème	Degré de liberté	Type
1	3	PL
2	2	PNL
3	6	PNLMNE
4	$\lvert\theta\rvert$: nombre variables de commande	CO stochastique

Exercice 2:

Indiquez si le problème ci-dessous est un PNL ou un LP. Selon vous, quelles sont les méthodes les plus efficaces pour résoudre ce problème ?

$$\begin{aligned} \max\ & f(x,y,z,m) = x - 3y + 1.25z - 2 \cdot \log(m) \\ \text{s.t.}\ & m \cdot \exp(y) \geq 10 \\ & \log(m) - x + 4z \geq 6 \\ & x - 3y \leq 9 \end{aligned}$$

Solution 2:

1. PNL
2. Méthodes:
    - Optimisation numérique

Exercice3:

Une compagnie d'alimentation dispose de 2000 Kg de café africain, 3000 Kg de café brésilien et 500 KG de café colombien. En utilisant ces trois produits la compagnie procède à des mélanges pour obtenir deux types de café à commercialiser. Le plan de production est représenté par le tableau suivant :

	Café type1	Café type2
Café africain	0.6	0.4
Café brésilien	0.3	0.4
Café colombien	0.1	0.2

Le 1^{er} type est vendu à 140 DA et le $2^{ième}$ à 170 DA le Kg. Donner le modèle de programmation linéaire correspondant à ce problème de manière à ce que la compagnie réalise un maximal de bénéfice.

Solution 3:

- Q1 représente la quantité à produire du café de type 1
- Q2 représente la quantité à produire pour du café de type 2

Le PL est :

Max Z=140×Q1 +170×Q2
Sujet à:
0.6×Q1 + 0.4×Q2 ≤ 2000
0.3×Q1 + 0.4×Q2 ≤ 3000
0.1×Q1 + 0.2×Q2 ≤ 500
Q1, Q2 ≥ 0

Exercice 4:

Une association culturelle organise une exposition, pendant cette exposition des tasses de café au lait et des tasses de chocolat au lait sont vendues pour apporter une aide aux orphelins. Un sponsor a permis de procurer 40 litres de lait, 2 kg de sucre et assez de café et de chocolat pour faire au plus 150 tasses de chaque boisson. On prévoit de servir 2 morceaux de sucre par tasse en moyenne; chaque paquet de sucre contient 120 morceaux et le poids du paquet indiqué sur la boite est de 500 g ; il faut 1/4 de litre de lait pour une tasse de chocolat et 1/12 de litre de lait pour une tasse de café. Le trésorier du club propose de vendre 50 DA chaque tasse de chocolat au lait et 40 DA chaque tasse de café au lait.

-Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Solution 4:

- X représente le nombre de tasses de café au lait à préparer
- Y représente le nombre de tasses de chocolat au lait à préparer

Le PL est :

Max Z=40X + 50Y
Sujet à:
$2X+ 2Y \leq 480$
$\frac{1}{12}X + \frac{1}{4}Y \leq 40$
$X \leq 150$
$Y \leq 150$
$X, Y \geq 0$

Exercice 5:

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose deux types d'ordinateurs : le T1 et le T2. Chacun d'eux comporte un processeur - le même - mais les deux modèles diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires. Plus précisément, le T1 comporte 2 barrettes alors que le T2 en comporte 6. Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes. L'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour T1 est de 3 minutes alors que pour le T2 elle n'est que d'une minute ; on ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir. Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 400 DA sur le T1et de 800DA sur le T2.

Le problème est de déterminer les quantités de chacun des deux types d'ordinateurs à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

- Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Solution 5:

- $X1$ représente le nombre de d'ordinateurs de type 1 à fabriquer
- $X2$ représente le nombre d'ordinateurs de type 2 à fabriquer

Le PL est :

Max Z=400×X1 +800×X2
Sujet à:
$X1 + X2 \leq 10\,000$
$2\times X1 + 6\times X2 \leq 48\,000$
$3\times X1 + X2 \leq 24\,000$
$X1, X2 \geq 0$

Exercice 6:

Une usine produit sur deux chaînes des appareils électroniques. En raison des différences importantes dans les procédés de fabrication, les temps nécessaires aux machines outil fabrication (FAB) et finition réglage (FIR) pour traiter un appareil diffèrent sensiblement sur chaque chaine.

L'élaboration d'un appareil sur la chaîne 1 nécessite 3 heures de FAB et 1 heure de FIR pour un prix de vente unitaire de 25 DA tandis que la 2ième chaine produit avec 1 heure de FAB et 2 heures de FIR et pour un prix de vente unitaire de 20 DA.

La machine FAB est disponible 60 heures par mois et la machine FIR 70 heures. La demande étant de 100 appareils par mois au moins. L'usine veut déterminer le plan de production de gain maximal.

- Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

- Mettre le PL obtenu sous forme matricielle.

Solution 6:

1)

- *X1* représente le nombre d'appareils à produire sur la première chaîne
- *X2* représente le nombre d'appareils à produire sur la deuxième chaîne

Le PL est :

Max Z=25×X1 +20×X2

Sujet à:

$3 \times X1 + X2 \leq 60$

$X1 + 2 \times X2 \leq 70$

$X1 + X2 \geq 100$

$X1, X2 \geq 0$

2) Mise sous forme matricielle

La contrainte $X1 + X2 \geq 100 \Leftrightarrow -X1 - X2 \leq -100$

Max Z=25×X_1 +20×X_2

Sujet à:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$X1, X2 \geq 0$

Exercice 7:

Reformuler sous forme canonique les programmes linéaires suivants:

1- Min Z= 2x1 – x2

$$\text{Sc} \begin{cases} 2x1 - 3x2 = -2 \\ |4x1 - x2| \leq 3 \\ x1, x2 \geq 0 \end{cases}$$

2- Max Z= x1 – 2x2 -x4

$$\text{Sc} \begin{cases} x1 + x2 + x3 + 2x4 = 3 \\ 2x1 - x2 + 5x3 = -6 \\ 3x1 + 2x2 - 3x4 \geq 2 \\ x1 \in \mathbb{R}, x2, x3, x4 \geq 0 \end{cases}$$

Solution 7:

1)

- L'équation *2x1 - 3x2 = -2* est transformée en une inégalité de signe ≥ en ajoutant une valeur positive (désignée par la *variable d'excédent*, *e1*) à son membre gauche, i.e., *2x1 - 3x2 + e1 ≥ -2, e1≥ 0;*
- En utilisant l'une des propriétés suivantes de la fonction valeur absolue
  1. $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b \Leftrightarrow -x \leq b$ et $x \leq b$;
  2. $|x| = s - t,\ s \geq 0$ et $t \geq 0; s + t \leq b$.

  La deuxième contrainte $|4x1 - x2| \leq 3$ est transformée en une inégalité de signe ≥ comme suit:
  1. $|4x1 - x2| \leq 3 \ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x1 - x2 \geq -3 \\ \text{et} \\ -4x1 + x2 \geq -3 \end{cases};$
  2. Posons $4x1 - x2 = s - t, s \geq 0, t \geq 0$ alors $|4x1 - x2| \leq 3 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4x1 - x2 - s + t + e2 \geq 0,\ e2 \geq 0 \\ \text{et} \\ -s - t \geq -3 \end{cases}.$
- Le PL sous forme canonique résultant prend l'une des formes suivantes:
  - **Min Z=2x1 - x2**
    Sujet à:
    $2x1 - 3x2 + e1 \geq -2$
    $4x1 - x2 \geq -3$
    $-4x1 + x2 \geq -3$
    $x1, x2, e1 \geq 0$
  - **Min Z=2x1 − x2**
    Sujet à:
    $2x1 - 3x2 + e1 \geq -2$
    $-t - s \geq -3$
    $4x1 - x2 - s + t + e2 \geq 0$
    $x1, x2, e1, e2, s, t \geq 0$

2)

- La variable *x1* $\in R$ sera remplacée par la différence de variables réelles positives, i.e., $x1 = x1^+ - x1^-, x1^+ \geq 0$ et $x1^- \geq 0$;
- L'équation *x1 +x2 + x3 +2x4 = 3* est transformée en une inégalité de signe ≤ en retranchant une valeur positive (désignée par la *variable d'excédent e1*) à son membre gauche, i.e., $x1^+ - x1^-$ *+ x2 + x3 +2x4* − *e1 ≤3, e1≥ 0;*
- L'équation 2*x1 -x2 + 5x3* = -6*,* est transformée en une inégalité de signe ≤ en retranchant une valeur positive (désignée par la *variable d'excédent*, *e2*) à son membre gauche, i.e., $2x1^+ - 2x1^- - x2 + 5x3 - e2 \leq -6, e2 \geq 0$*;*
- L'équation 3*x1 +2x2* − *3x4 ≥* 2 est transformée en une inégalité de signe ≤ en la multipliant par −1 gauche, i.e., $-3x1^+ + 3x1^- - 2x2 + 4x3 \leq -2$;
- Le PL sous forme canonique résultant aura la forme suivante:

  $\boldsymbol{Max\ Z = x1^+ - x1^- - 2x2 - x4}$
  Sujet à:
  $x1^+ - x1^- + x2 + x3 + 2x4 - e1 \leq 3$
  $2x1^+ - 2x1^- - x2 + 5x3 - e2 \leq -6$
  $-3x1^+ + 3x1^- - 2x2 + 4x3 \leq -2$

$x1^+, x1^-, x2, x3, x4, e1, e2 \geq 0$

Exercice 8:

Donner la forme standard du programme linéaire suivant :

Max Z= 2x1 – 3x2

$$\text{Sc} \begin{cases} 2x1 + x2 \leq K \quad (K \in R) \\ |4x1 + 3x2| \leq 3 \\ x1 + 3x2 \geq 4 \\ x1 \geq 0 \ , \ x2 \in R \end{cases}$$

Solution 8:

- La variable $K \in R$ sera remplacée par la différence de variables réelles positives, i.e., $K = K^+ - K^-, K^+ \geq 0$ et $K^- \geq 0$;
- La variable $x2 \in R$ sera remplacée par la différence de variables réelles positives, i.e., $x2 = x2^+ - x2^-, x2^+ \geq 0$ et $x2^- \geq 0$;
- La première contrainte est transformée en égalité en ajoutant une *variable d'écart* positive à son membre gauche: $2x1 + x2^+ - x2^- - K^+ + K^- + e1 = 0$;
- La deuxième contrainte $|4x1 - x2| \leq 3$ est transformée en une égalité comme suit: $|4x1 + 3x2| \leq 3 \iff \begin{cases} 4x1 + 3x2^+ - 3x2^- + e2 = 3, \\ \qquad \text{et} \qquad\qquad\qquad e2 \geq 0; \\ -4x1 - 3x2^+ + 3x2^- + e2 = 3, \end{cases}$
- La troisième contrainte est transformée en égalité en retranchant une *variable d'excédent* positive à son membre gauche $x1 + 3x2^+ - 3x2^- - e3 = 4$;
- Le PL sous forme canonique résultant prend l'une des formes suivantes:

Min Z=2x1 - $3x2^+ + 3x2^-$
Sujet à:
$2x1 + x2^+ - x2^- - K^+ + K^- + e1 = 0$
$4x1 + 3x2^+ - 3x2^- + e2 = 3$
$-4x1 - 3x2^+ + 3x2^- + e2 = 3$
$x1 + 3x2^+ - 3x2^- - e3 = 4$
$x1, x2^+, x2^-, K^+, K^-, e1, e2, e3 \ \geq 0$