Chapitre II
Programmation Linéaire

1. Introduction

La ***programmation linéaire*** est l'une des techniques d'optimisation les plus répandues en recherche opérationnelle. Ceci est dû principalement à la facilité de la modélisation, à l'efficacité des algorithmes développés et à l'existence sur le marché de nombreux logiciels. De plus, la généralisation de micro-informatique a mis la programmation linéaire à la portée de tous.

L'importance de la programmation linéaire est attribuée principalement à ses multiples applications, ainsi qu'à son apport à générer des techniques permettant de trouver des solutions optimales.

La programmation linéaire est un outil d'aide à la prise de décision notamment dans les décisions d'ordre quantitatif du monde des affaires, dans les entreprises d'ingénierie industrielle et, d'une façon moins importante, dans certaines activités des sciences de la vie et des sciences sociales.

L'objectif principal de la programmation linéaire est de déterminer l'affectation optimale de ressources rares entre des activités ou produits concurrents. Les situations économiques demandent souvent qu'on optimise une fonction sous plusieurs contraintes prenant la forme d'inégalités.

La ***programmation linéaire*** est une classe spéciale de modèles de ***programmation mathématique*** (i.e. optimisation) dont le but est de déterminer les valeurs des ***variables de décision*** qui maximisent ou minimisent une ***fonction objectif*** linéaire, où les variables de décision sont soumises à des ***contraintes linéaires***.

Comme pour les modèles de programmation mathématique plus généraux, les variables de décision représentent des quantités qui sont, dans un certain sens, des entrées contrôlables du système modélisé. Une fonction objectif représente un *critère objectif* principal ou un but qui mesure l'efficacité du système (comme la maximisation des profits ou de la productivité, ou la minimisation des coûts ou de la consommation). Il existe toujours une limitation pratique de la disponibilité des ressources (temps, matériaux, machines, énergie ou main-d'œuvre) pour le système, et ces contraintes sont exprimées sous forme d'inégalités ou d'équations linéaires impliquant les variables de décision. Résoudre un problème de programmation linéaire signifie déterminer les valeurs réelles des variables de décision qui optimisent la fonction objectif, sous réserve des limitations imposées par les contraintes.

Un problème de programmation linéaire est un cas particulier d'un problème général d'optimisation avec contraintes. Dans le cadre général, le but est de trouver un point qui minimise ou maximise la fonction objectif et satisfait en même temps les contraintes. Nous appelons tout point qui satisfait les contraintes un ***point réalisable***.

L'utilisation de modèles de programmation linéaire pour l'optimisation de systèmes se présente tout naturellement dans une grande variété d'applications. Certains modèles peuvent ne pas être strictement linéaires, mais peuvent être rendus linéaires en appliquant des transformations mathématiques appropriées. D'autres applications encore ne sont certes pas tout à fait linéaires, mais peuvent être efficacement approchées par des modèles linéaires. La facilité avec laquelle les problèmes de programmation linéaire peuvent généralement être résolus en fait un moyen attrayant de traiter des problèmes non linéaires autrement insolubles.

Dans ce chapitre, nous étudions les méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire. Les méthodes de programmation linéaire permettent de choisir le meilleur point réalisable parmi les nombreux points réalisables possibles. En général, le nombre de points réalisables est infiniment grand. Cependant, comme nous le verrons, la solution d'un problème de programmation linéaire peut être trouvée en recherchant un nombre fini particulier de points réalisables, appelés ***solutions réalisables de base***. Par conséquent, en principe, nous pouvons résoudre un problème de programmation linéaire en comparant simplement le nombre fini de solutions réalisables de base et en trouvant celle qui minimise ou maximise la fonction objective - nous appelons cette approche la "***méthode de la force brute***". Pour la plupart des problèmes de décision pratiques, même ce nombre fini de solutions de base réalisables est si grand que la méthode consistant à choisir la meilleure solution en les comparant les unes aux autres est peu pratique. Pour vous faire une idée de la quantité de calculs nécessaires dans une approche par la force brute, prenez l'exemple suivant. Supposons que nous ayons une petite usine avec 20 machines différentes produisant 20 pièces différentes. Supposons que n'importe laquelle de ces machines puisse produire n'importe quelle pièce. Nous supposons également que le temps de production de chaque pièce sur chaque machine est connu. Le problème consiste alors à affecter une pièce à chaque machine de manière à minimiser le temps de production global. Nous voyons qu'il y a 20 ! (20 factoriels) affectations possibles. L'approche par la force brute pour résoudre ce problème d'affectation consisterait à écrire toutes les affectations possibles, puis à choisir la meilleure en les comparants. Supposons que nous ayons à notre disposition un ordinateur qui met 1 μsec (10^{-6} secondes) pour déterminer chaque affectation. Alors, pour trouver la meilleure affectation (optimale), cet ordinateur aurait besoin de 77 147 ans (en travaillant 24 heures sur 24, 365 jours par an) pour trouver la meilleure solution. Une autre approche pour résoudre ce problème consiste à faire appel à des planificateurs expérimentés pour optimiser ce problème d'affectation. Une telle approche s'appuie sur des heuristiques. Les heuristiques s'en approchent, mais donnent des réponses sous-optimales. Une heuristique qui donne des résultats raisonnables, avec une erreur de 10 % par exemple, peut ne pas être suffisante. Par exemple, dans une entreprise qui fonctionne avec de gros volumes et une faible marge bénéficiaire, une erreur de 10 % peut faire la différence entre une perte et un bénéfice.

2. Bref Historique de la programmation linéaire

Lorsque François Quesnay (1694-1774) publie en 1758 son Tableau économique de la France, il inaugure l'application de l'algèbre linéaire à un nouveau domaine: le calcul économique. Mieux compris de Karl Marx que d'Augustin Cournot, ses vrais continuateurs n'apparaîtront qu'au début du XXe siècle, avec V. K. Dimitriev (1904) et Vassily Léontieff, qui, en 1925, expose dans la revue Planification socialiste sa méthode du tableau intersectoriel.[1]

[1] V. Léontieff a reçu le prix Nobel d'économie en 1973.

Mais, dans l'intervalle, d'autres applications de la programmation mathématique sont nées. En 1776, l'illustre Gaspard Monge (1744-1818) réalise l'optimisation du coût des transports dans le problème de déblai et remblai (séances des 27 janvier et 7 février 1776 de L'Académie royale des Sciences). Bien que cette communication ait subi plusieurs remaniements avant d'être publiée sous sa forme définitive aux Comptes rendus de l'Académie dont Monge était devenu membre (mémoire présenté le 28 mars 1781, Histoire de l'Académie royale des Sciences, 2^{e} partie, 1784), elle ne cessa de susciter une vive curiosité. Plusieurs géomètres de talent s'y intéressèrent, tels Charles Dupin (Histoire de l'Académie, 18 décembre 1815), Albert de Saint-Germain en 1884 (Acad. Caen, 1826), Paul Appell en 1884,1926 et 1928 (Mémorial des sciences mathématiques, XXVII, 1928) et, enfin, Ferdinand Pottier (CR Acad. des Sciences, t. 31, 1950, p. 11- 22-1124). Il est vrai que Monge inventa la belle théorie des congruences de normales pour venir à bout d'un problème qu'il formulait « en continu » et « dans l'espace », alors qu'aujourd'hui on le considère comme « plan » et « discret » et le résout directement au moyen d'algorithmes déduits de la théorie des graphes.

Un autre mathématicien de renom, le baron Jean- Baptiste Fourier (1768-1830), contemporain du premier essor de l'industrie, se trouve confronté à certains problèmes d'inéquations simultanées. Il fit connaître, en 1824, pour les résoudre, une méthode directe qui suscite encore l'admiration (Mémoires de l'Académie royale des Sciences, t. VII, Analyse des travaux, p. xlvi-lv, 1824).

Des méthodes efficaces de résolution des problèmes de programmation linéaire sont apparues à la fin des années 1930. En 1939, Kantorovich a présenté un certain nombre de solutions à des problèmes liés à la planification de la production et du transport. Pendant la Seconde Guerre mondiale, Koopmans a contribué de manière significative à la résolution des problèmes de transport. Kantorovich et Koopmans ont reçu un prix Nobel d'économie en 1975 pour leurs travaux sur la théorie de l'allocation optimale des ressources. En 1947, Dantzig a développé une nouvelle méthode pour résoudre les programmes linéaires, connue aujourd'hui sous le nom de *méthode du simplexe*. Dans le chapitre suivant, nous présentons en détail la méthode du simplexe. La méthode du simplexe est efficace et élégante. Cependant, elle a la propriété indésirable que, dans le pire des cas, le nombre d'étapes (et donc le temps total) nécessaires pour trouver une solution croît de manière exponentielle avec le nombre de variables. Ainsi, on dit que la méthode du simplexe a une complexité exponentielle dans le pire des cas. Cette constatation a suscité un intérêt pour la conception d'algorithmes de résolution de programmes linéaires de complexité polynomiale, c'est-à-dire des algorithmes qui trouvent une solution en un temps limité par un polynôme du nombre de variables. Khachiyan, en 1979, a été le premier à concevoir un tel algorithme. Cependant, son algorithme a suscité un intérêt plus théorique que pratique. Puis, en 1984, Karmarkar a proposé un nouvel algorithme de programmation linéaire de complexité polynomiale, qui semble résoudre certains problèmes complexes du monde réel en matière d'ordonnancement, de routage et de planification plus efficacement que la méthode du simplexe. Les travaux de Karmarkar ont conduit au développement de nombreuses autres méthodes non complexes, communément appelées méthodes du point intérieur. Cette approche est actuellement encore un domaine de recherche actif.

3. Définition et hypothèses de la programmation linéaire

3.1. Qu'est-ce-que la programmation linéaire ?

- La programmation linéaire est une technique de modélisation mathématique qui permet d'analyser et de résoudre des problèmes d'optimisation appelés ***programmes linéaires***. Ces derniers consistent à optimiser (maximiser ou minimiser) une ***fonction objectif*** (appelée aussi ***fonction de coût*** ou ***fonction***

économique) linéaire de ***n variables de décision*** soumises à un ensemble de **contraintes** formulées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires exprimées avec les *n* variables de décision.

- Elle traite de manière générale d'un problème d'allocation de ressources limitées parmi des activités concurrentes et ce d'une façon optimale.
- Elle emploie un modèle mathématique qui décrit le problème réel.
- L'adjectif ***"linéaire***" indique que toutes les fonctions mathématiques de ce modèle sont linéaires tandis que le terme "programmation" signifie essentiellement planification.

3.2. Hypothèses

Un programme linéaire (PL) est un modèle d'optimisation avec contraintes vérifiant les conditions suivantes:

1. Les variables de décision doivent être continues (i.e. $\in \mathbb{R}$); elles peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle restreint.
2. La fonction objectif doit être une fonction linéaire.
3. Les côtés gauches des contraintes doivent être des fonctions linéaires.

Ainsi, un PL s'écrivent sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{Maximiser\ or\ minimiser}\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$sujet$ à:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{2n} \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_{mn} \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_m$$

où les valeurs x_j sont des variables de décision et les valeurs c_j, a_{ij} et b_j sont des constantes réelles, appelées *paramètres* ou *coefficients*, qui sont données ou spécifiées par les hypothèses du problème. La plupart des programmes linéaires exigent que toutes les variables de décision soient non négatives.

Les programmes linéaires reposent sur les hypothèses implicites suivantes:

1. ***Proportionnalité***: avec les programmes linéaires, nous supposons que la contribution des variables individuelles dans la fonction objectif et les contraintes est proportionnelle à leur valeur. Autrement dit, si nous doublons la valeur d'une variable, nous doublons la contribution de cette variable à la fonction objectif et à chaque contrainte dans laquelle la variable apparaît. La contribution par unité de la variable est constante. Par exemple, supposons que la variable x_j soit le nombre d'unités du produit *j* fabriquées et que c_j soit le coût unitaire de production du produit *j*. Si l'on double la quantité du produit *j* fabriquée alors on doublera son coût, le coût unitaire est constant et l'hypothèse de proportionnalité est satisfaite.

2. ***Additivité***: l'additivité signifie que la valeur totale de la fonction objectif et de chaque fonction de contrainte est obtenue en additionnant les contributions individuelles de chaque variable.
3. ***Divisibilité***: les variables de décision peuvent prendre n'importe quelle valeur numérique réelle dans une plage spécifiée par les contraintes. En d'autres termes, les variables ne sont pas limitées à des valeurs entières. Lorsque les valeurs fractionnaires ne constituent pas une solution sensée, comme le nombre de vols qu'une compagnie aérienne doit effectuer chaque jour entre deux villes, le problème doit être formulé et résolu comme un ***programme linéaire entier***.
4. ***Certitude***: nous supposons que les valeurs des paramètres du modèle sont connues avec certitude ou sont au moins traitées comme telles. La solution optimale obtenue est optimale pour le problème spécifique formulé. Si les valeurs des paramètres sont erronées, la solution obtenue n'a que peu de valeur.

Dans la pratique, les hypothèses de proportionnalité et d'additivité nécessitent la plus grande attention et sont les plus susceptibles d'être violées par le modélisateur. Avec l'expérience, nous reconnaissons quand des solutions entières sont nécessaires et que les variables doivent être modélisées explicitement.

Exemple

$\boldsymbol{Maximiser}\ z = 50x_1 + 20x_2 - 15x_3$ — Fonction objectif

Sujet à :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4000 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 100 \\ x_1 \geq 40 \\ 4x_1 + \frac{2}{7}x_2 - x_3 \geq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Contraintes}$$

x_1, x_2, x_3 — Variables de décision

3.3. Énoncé d'un problème d'optimisation

Une entreprise fabrique deux produits A et B, en utilisant une machine m et deux matières premières p et q. On dispose chaque jour de 8 heures de m, de 10 kg de p et de 36 kg de q. On suppose que :

- la production d'une unité de *A* nécessite *2 kg* de *p* et *9 kg* de *q*, et utilise la machine *m* durant 1 heure ;
- la production d'une unité de *B* nécessite *2 kg* de p et *4 kg* de *q*, et utilise la machine *m* durant 2 heure ;
- les profits réalisés sont de 50 DA par unité de *A* et 60 DA par unité de *B*.

L'objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces 2 produits en utilisant au mieux ses ressources.

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème de production :

	A	B	Disponible
m	1 h	2 h	8 h
p	2 kg	2 kg	10 kg
q	9 kg	4 kg	36 kg
Profit Unitaire	50 DA	60 DA	

3.4. Construction d'un modèle linéaire

Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ? Il suffit de connaître la quantité du produit A et la quantité du produit B à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

Agissons comme si ces quantités nous étaient connues et dénotons-les par :

x_1 = la quantité du produit *A* à produire

x_2 = la quantité du produit B à produire

Les variables x_1 et x_2 sont dites **variables de décision**.

Quel profit l'entreprise retirera-t-elle de la vente de ces deux produits ? Il s'agit d'additionner les bénéfices à tirer de chacun des 2 produits:

- pour le produit A, elle retire 50 DA par unité et en fabrique $x1$ unités; cette

production lui rapporte donc un profit de $(50\ x_1)$ *DA*;

- de même, la quantité x_2 du produit B lui permet de faire un profit de $(60\ x_2)$ *DA*.

Le profit total à tirer des deux produits s'élève donc à:

$(50\ x_1 + 60\ x_2)$ *DA*

Nous dénoterons ce profit total par z et laisserons implicite l'unité monétaire :

$z = 50\ x_1 + 60\ x_2$

Nous cherchons évidemment à rendre z aussi grand que possible en donnant à x_1 et x_2 des valeurs appropriées.

La grandeur z est une fonction qui, à chaque plan de production (une quantité de A, une quantité de B), associe le nombre de dirhams que l'entreprise retirerait comme profit si elle adoptait ce plan. Cette fonction z, qui traduit l'objectif de notre problème, s'appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**. Et, comme nous cherchons à rendre z aussi grand que possible, nous écrivons :

Maximiser z *où* $z = 50\ x_1 + 60\ x_2$

ce que généralement l'on convient d'abréger comme suit :

Max $z = 50\ x_1 + 60\ x_2$

S'il ne s'agissait pour l'entreprise que de maximiser z, il suffirait de laisser augmenter x_1 ou x_2 pour que z prenne une valeur aussi grande qu'elle le souhaite. Mais s'attendre à de tels profits s'apparente plus au rêve qu'à la situation de notre entreprise. Il y a bien sûr des empêchements naturels, appelés **contraintes**, qui freinent le rêve d'un profit infini. Prenons en considération tour à tour chacune des contraintes.

Contrainte relative à la machine *m*

Le temps d'utilisation de la machine *m* pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 8 heures disponibles :

Temps d'utilisation de m ≤ 8:

Or, ce temps utilisé est la somme des heures consacrées à chacun des types de produits. Pour le produit A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité $x1$ se calcule ainsi:

1 heure/(unité de A) × x_1 (unité de A) = x_1 heures

pour le produit B, on procède de façon analogue :

2 heure/(unité de B) × x_2 (unité de B) = $2x_2$ heures

La contrainte relative à la machine *m* s'écrit donc :

$x_1 + 2x_2 \leq 8$ *(m)*

On emploie le signe « ≤ », et non « = », car il n'est pas obligatoire que toutes les heures disponibles soient utilisées pour la fabrication des produits A et B, bien qu'il ne soit pas interdit qu'il en soit ainsi.

Contraintes relatives aux matières premières

En s'inspirant de la contrainte relative à la machine, ces contraintes s'écrivent tout naturellement :

$2x_1 + 2x_2 \leq 10$ *(p)*

$9x_1 + 4x_2 \leq 36$ *(q)*

Contraintes de positivité

Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables).

$x_1; x_2 > 0;$

Le modèle formulé sous forme d'un PL se résume ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Max}\, z = 50x_1 + 60x_2 \\
&sujet \text{ à:} \\
&x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
&2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
&9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\
&\qquad\qquad x_1, \quad x_2 \geq 8
\end{aligned}
$$

4. Les différentes formes d'écriture d'un programme linéaire

4.1. Forme générale

Le modèle mathématique générale représentant un programme linéaire est décrit suit:

$$
\begin{aligned}
&Maximiser\ (ou\ Minimiser)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\boldsymbol{Sujet} \text{ à } \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} b_i, & \forall\, i = 1,2,\dots,m \\ x_j \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} 0, & \forall j = 1,\dots,n \end{cases}
\end{aligned}
$$

où les constantes c_j, a_{ij} et b_j sont des nombres réels.

Les éléments de ce modèle ont la signification suivante :

- z : la valeur de la fonction objective.
- x_j : les variables de décision (inconnues, i.e., recherchées) du modèle.
- c_j : les coefficients des variables de la fonction objective.
- a_{ij} : les coefficients des variables des contraintes fonctionnelles.
- b_j : les seconds membres des contraintes (quantités des ressources disponibles).
- La notation $\begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix}$ signifie que chaque contrainte possède l'un des trois signes mentionnés.
- Il y a m contraintes fonctionnelles, n contraintes des variables de décision et n variables.

L'optimisation de ce modèle consiste à déterminer les valeurs des diverses variables de décision maximisant (ou minimisant) la fonction objective, et devant respecter les contraintes fonctionnelles et des variables de décision.

4.2. Forme matricielle

Notons $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ le vecteur des variables avec T désigne le signe de transposition, $b = (b_1, b_2, , b_n)^T$ celui des seconds membres des contraintes, $C = (c_1, c_2, , c_n)^T$ celui des coûts ou profits associes aux variables, et A la matrice $m \times n$ des a_{ij},, i.e., $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$. On peut alors écrire un PL sous forme matricielle:

$$Maximiser\ (ou\ Minimiser)\ Z = C^T x$$

$$\boldsymbol{Sujet}\ \text{à} : \begin{cases} Ax \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} B \\ x \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

4.2. Forme algébrique

Le modèle mathématique représentant un programme linéaire est décrit algébriquement comme suit:

$$Maximiser\ (ou\ Minimiser)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\boldsymbol{Sujet}\ \text{à}: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i, & \forall\ i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, & \forall\ i = p, p+1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \forall\ \ j = 1, 2, \dots, q \\ x_j\ quelquonque, & \forall\ \ j = q+1, q+2, \dots, n \end{cases}$$

Ce modèle possède *m* contraintes fonctionnelles dont *p* contraintes d'inégalité de sens ≥ et *m-p* contraintes d'égalité (=), et *n* variables de décisions dont *q* variables positives et *n-q* variables quelconques.

4.3. Forme canonique

A) Type I

$$Maximiser\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\textbf{Sujet}\ \text{à} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i, & \forall\, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \forall\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

B) Type II

$$Minimiser\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\textbf{Sujet}\ \text{à:} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i, & \forall\, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \forall\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

- La forme canonique est utilisée en théorie *de dualité* et pour la *résolution graphique*. Dans la théorie mathématique de l'optimisation, la dualité ou le principe de dualité est le principe selon lequel les problèmes d'optimisation peuvent être considérés sous l'un ou l'autre de deux points de vue, le problème primal ou le problème dual. Si le primal est un problème de minimisation alors le dual est un problème de maximisation (et vice versa).
- Le passage de la forme de type I vers le type II est effectué comme suit:
  - La maximisation d'une fonction objective est équivalente à minimiser la fonction objective opposée et à multiplier par *-1* la valeur de la fonction-objectif trouvée par la minimisation, i.e., *Maximiser(z) = -Minimiser(- z)*
  - Chaque contrainte fonctionnelle de sens ≤ est convertie en contrainte de sens ≥ en multipliant par –1 ces deux membres.

Exemple

PL en Forme Canonique Type I

$$\begin{array}{l} Maximiser\ z = 50x_1 - 20x_2 - 5x_3 \\ Sujet\ \text{à}: \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

PL en Forme Canonique Type II

$$\begin{array}{l} -Minimiser\ z = -50x_1 + 20x_2 + 5x_3 \\ Sujet\ \text{à}: \\ -x_1 - x_2 + x_3 \geq -15 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- Le passage de la forme de type II vers le type I est effectué comme suit:

- La minimisation d'une fonction objective est équivalente à maximiser la fonction objective opposée et à multiplier par –1 la valeur de la fonction-objectif trouvée par la maximisation, i.e., *Minimiser(z) = -Maximiser(- z)*
- Chaque contrainte fonctionnelle de sens ≤ est convertie en contrainte de sens ≥ en multipliant par –1 ces deux membres.

Exemple

PL en Forme Canonique Type II		**PL en Forme Canonique Type I**
$Minimiser\ z = x_1 - x_2 - x_3$ $Sujet$ à : $5x_1 + x_2 + x_3 \geq 30$ $0.5x_1 - x_2 - x_3 \geq 5$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\Rightarrow$	$-Maxmiser\ z = -x_1 + x_2 + x_3$ $Sujet$ à : $-5x_1 - x_2 - x_3 \leq -30$ $-0.5x_1 + x_2 + x_3 \leq -5$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

- Le passage d'un PL de forme générale en un PL sous forme canonique est effectué en respectant les règles suivantes:

❖ **Pour le type I:**

- Les contraintes fonctionnelles de sens ≥ sont ramenées à la forme ≤ en **multipliant** par –1 les deux membres de la contrainte;
- Les contraintes fonctionnelles qui sont des égalités sont transformées en inégalités de sens ≤ par dédoublement de ces contraintes en appliquant la formule d'équivalence suivante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}\, x_j \leq -b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \end{cases}$$

❖ **Pour le type II:**

- Les contraintes fonctionnelles de sens ≤ sont ramenées à la forme ≥ en **multipliant** par –1 les deux membres de la contrainte;
- Les contraintes fonctionnelles qui sont des égalités sont transformées en inégalités de sens ≥ par dédoublement de ces contraintes en appliquant la formule d'équivalence suivante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}\, x_j \geq -b_i \end{cases}$$

(a) Toute variable x_j négative ou nulle, i.e. $x_j \leq 0$, sera remplacée par une variable x_j^+ tel que $x_j^+ = -x_j$;

(b) Toute variable x_j qui n'est soumise à aucune condition de signe ($x_j \in \mathbb{R}$) sera remplacée par deux variables non négative x_j^+ et x_j^- tel que $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec

$x_j^+ = maximum\ [0, x_j]$, $x_j^- = maximum\ [0, -x_j]$ (tout réel est différence de deux réels positifs ou nuls).

Note

Les variables x_j^+ et x_j^- ne peuvent pas faire partie d'un même "programme de base" i.e. l'une d'entre elles est nécessairement nulle dans l'une, au moins, des solutions optimales du problème

Exemple:

PL en Forme Générale		**PL en Forme Canonique Type I**
$Maximiser\ z = x_1 - x_2 - x_3$ $Sujet$ à : $5x_1 + x_2 + x_3 \geq 30$ $4x_1 - x_2 - x_3 = 5$ $x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$ $x_1 \geq 0$ $x_2 \leq 0$ $x_3 \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$Maxmiser\ z = x_1 + x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-)$ $Sujet$ à : $-5x_1 + x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-) \leq -30$ $4x_1 + x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-) \leq 5$ $-4x_1 - x_2^+ + (x_3^+ - x_3^-) \leq -5$ $x_1 + -x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-) \leq 10$ $x_{1,} x_2^+, x_3^+, x_3^- \geq 0$

PL en Forme Générale		**PL en Forme Canonique Type II**
$Minimiser\ z = 7x_1 + x_2 + 10x_3$ $Sujet$ à : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$ $5x_1 - 3x_2 + x_3 = 255$ $25x_1 - x_2 + x_3 \geq 100$ $x_1 \leq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$Minimiser\ z = -7x_1^+ + x_2 + 10(x_3^+ - x_3^-)$ $Sujet$ à : $x_1^+ - x_2 - (x_3^+ - x_3^-) \geq -200$ $-5x_1^+ - 3x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \geq 255$ $5x_1^+ + 3x_2 - (x_3^+ - x_3^-) \geq -255$ $-25x_1^+ - x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \geq 100$ $x_1^+, x_{2,}, x_3^+, x_3^- \geq 0$

4.4. Forme standard

$$Maximise(ou\ Minimiser)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\textbf{\textit{Sujet}}\text{ à:}\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, & \forall\ i = 1, 2, \dots, m \\ b_i \geq 0, & \forall\ i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \forall\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

- La forme standard est utilisée pour la résolution algébrique par des algorithmes (i.e., méthodes de calcul).
- La conversion d'un PL de forme générale en un PL sous sa forme standard est effectuée comme suit:
  - Toute contrainte fonctionnelle de sens $\geq$ sera convertie en une équation en appliquant la formule d'équivalence suivante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - e_i = b_i \,,\; e_i \geq 0$$

où e_i est variable supplémentaire non négative appelée ***variable d'excédent*** et affectée d'un coefficient nul dans la fonction à optimiser;

- Toute contrainte fonctionnelle de sens $\leq$ sera convertie en une équation en appliquant la formule d'équivalence suivante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + e_i = b_i \,,\; e_i \geq 0$$

où e_i est variable supplémentaire non négative appelée ***variable d'écart*** et affectée d'un coefficient nul dans la fonction à optimiser;

- Pour toute contrainte fonctionnelle comportant un second membre négatif, i.e., $b_i < 0$, *o*n multiplie par –1 chacun de ces deux membres;
- Pour la conversion de variables négatives ou de signe quelconque, on utilise les règles (a) et (b) décrites précédemment pour le passage d'un PL de forme général en un PL sous forme canonique.

Exemple

PL en Forme Générale

$$\begin{aligned}
&Maximiser\ z = 7x_1 + x_2 + 10x_3\\
&Sujet \text{ à :}\\
&x_1 + x_2 + x_3 \leq 200\\
&5x_1 - 3x_2 + x_3 = 255\\
&25x_1 - x_2 + x_3 \geq 100\\
&x_1 \leq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

PL en Forme Standard

$$\begin{aligned}
&Maximiser\ z = -7x_1^+ + x_2 + 10(x_3^+ - x_3^-)\\
&Sujet \text{ à :}\\
&-x_1^+ + x_2 + (x_3^+ - x_3^-) + e_1 = 200\\
&-5x_1^+ - 3x_2 + (x_3^+ - x_3^-) = 255\\
&-25x_1^+ - x_2 + (x_3^+ - x_3^-) - e_2 = 100\\
&x_1^+, x_{2,}, x_3^+, x_3^-, e_1, e_2 \geq 0
\end{aligned}$$

5. Interprétation économique

Un PL a une interprétation économique très large. Soit un acteur économique qui exerce n activités avec des intensités x_i à déterminer. Ces activités utilisent m ressources. On connait la quantité au de ressource a_{ij} nécessaire pour exercer l'activité j avec une intensité 1. On connait aussi le profit ou le coin c1 pour une intensité 1 de l'activité j. On veut trouver les intensités des activités, compatibles avec les ressources, pour maximiser le profit ou minimiser le profit. Ce problème est modélisable par un PL sous forme canonique.

La programmation linéaire définit donc une classe très large de modèles, mais dans laquelle on prend deux hypothèses restrictives fondamentales : la proportionnalité des coûts et des consommations de ressources aux intensités d'activités, et l'additivité des consommations de ressources (pas d'interactions entre activités). Nous indiquons en fait que de nombreux problèmes, en apparence non linéaires, peuvent être rendus linéaires. Par exemple, l'hypothèse de proportionnalité n'est pas respectée quand on produit un bien en grande série. Le prix de vente par unité bénéficie souvent de tarifs dégressifs, grâce aux économies d'échelle. Le prix de vente en fonction de la quantité est alors une fonction linéaire par morceaux qui croît de moins en moins vite. Il n'empêche que ce genre de fonction se linéarise facilement, moyennant des variables supplémentaires. Ainsi, le champ d'application de la programmation linéaire est bien plus vaste qu'il n'y paraît.

6. Les étapes de la modélisation d'un problème d'optimisation sous forme d'un programme linéaire

La formulation du modèle est l'aspect le plus important et le plus difficile de la résolution d'un problème d'optimisation réel. Résoudre un modèle qui ne représente pas précisément le problème réel est inutile. Donc, il est impérativement nécessaire de bien analyser et comprendre préalablement la situation (problème) d'optimisation et de s'assurer qu'elle se prête à l'utilisation de la programmation linéaire comme modèle d'optimisation.

Il n'existe pas de méthode simple pour formuler un problème d'optimisation sous forme de programmes linéaires. Néanmoins, cette tâche peut être simplifiée en suivant les étapes suivantes:

1. ***Identifier et définir les variables de décision pour le problème.***

   Définissez les variables de manière complète et précise. Toutes les unités de mesure doivent être indiquées explicitement, y compris les unités de temps si nécessaire. Par exemple, si les variables représentent les quantités d'un produit fabriqué, elles doivent être définies en termes de tonnes par heure, d'unités par jour, de barils par mois ou d'autres unités appropriées.

2. ***Définir la fonction objectif***

   Déterminer le critère d'évaluation des solutions alternatives. La fonction objectif sera normalement la somme de termes constitués d'une variable multipliée par un coefficient (paramètre) approprié. Par exemple, les coefficients peuvent être le bénéfice par unité de production, la distance parcourue par unité transportée ou le coût par personne embauchée.

3. ***Identifier et exprimer mathématiquement toutes les contraintes pertinentes***

   Il est souvent plus facile d'exprimer chaque contrainte en mots avant de la mettre sous forme mathématique. La contrainte écrite est décomposée en ses composants fondamentaux. Il faut ensuite substituer les coefficients numériques et les noms de variables appropriés aux termes écrits. Une erreur courante consiste à utiliser des variables qui n'ont pas été définies dans le problème, ce qui n'est pas valable. Cette erreur est souvent due au fait que l'on ne définit pas précisément les variables d'origine. Le processus de formulation est itératif, et il faut parfois définir des variables supplémentaires ou redéfinir les variables existantes. Par exemple, si l'une des variables est la production totale de l'entreprise et que cinq autres variables représentent la production des cinq usines de l'entreprise, il doit exister une constante qui oblige la production totale à être égale à la somme de la production des usines.

La figure II.1 résume la démarche générale pour la modélisation et l'analyse en programmation linéaire.

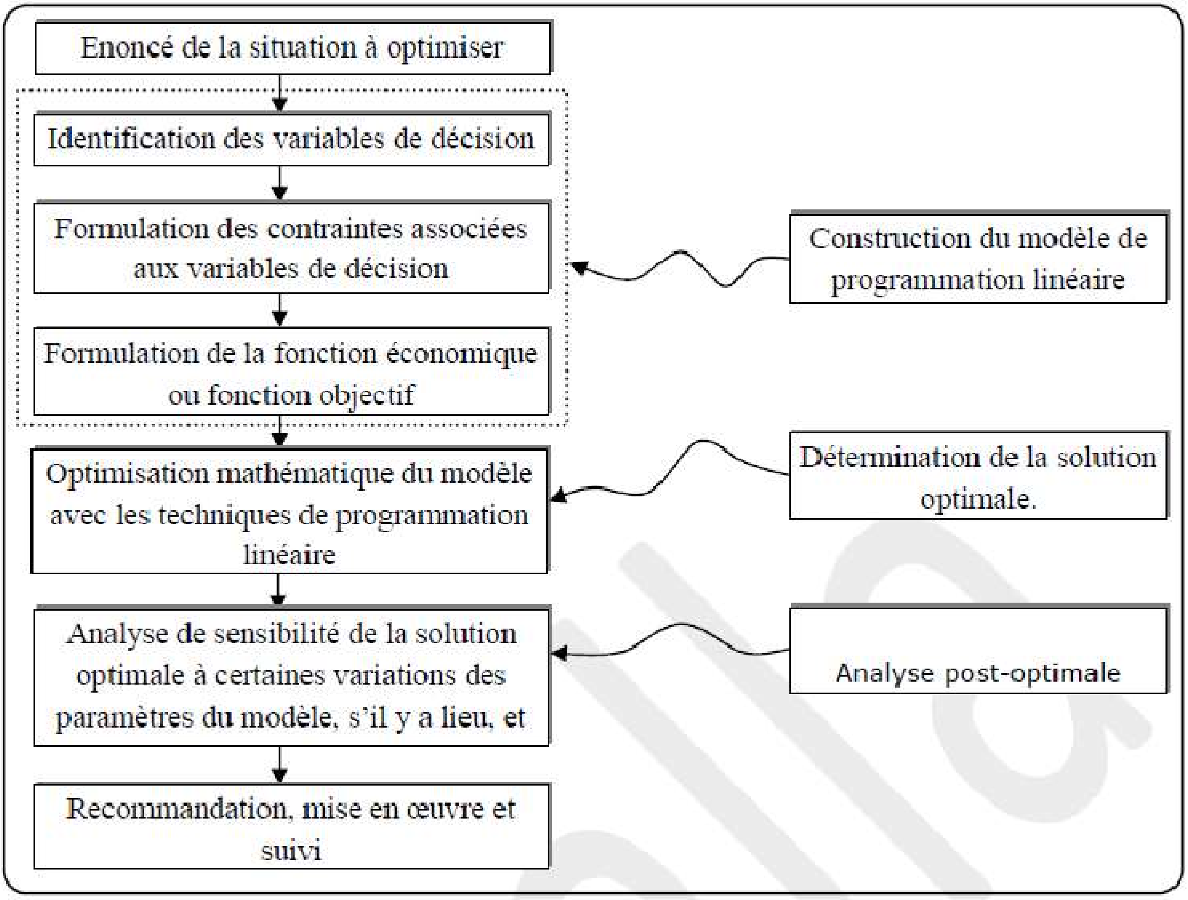


Figure II.1: Démarche de modélisation et analyse en programmation linéaire.

7. Solution réalisable et solution optimale

7.1. Définitions

- Une ***solution*** (*Solution*) pour un programme linéaire est un ensemble quelconque de valeurs numériques pour les variables de décision. Ces valeurs ne doivent pas nécessairement être les meilleures, ni même satisfaire les contraintes ou avoir un sens.
- Une ***solution réalisable*** (*Feasible solution*) est une solution qui satisfait à toutes les contraintes.
- L'***ensemble réalisable*** (*Feasible set*) ou la ***région réalisable*** est l'ensemble de toutes les solutions réalisables.
- Une ***solution optimale*** (*Optimal solution*) est la solution réalisable qui produit la meilleure valeur possible de la fonction objectif. La figure 7.2 illustre les relations entre ces types de solutions.
- La **solution d'un PL** dépend de la région des solutions réalisables (vide, bornée ou non bornée) et le type d'optimisation (maximisation ou minimisation), la solution optimale du programme linéaire correspondant soit unique, multiple, infinie ou pas de solution.

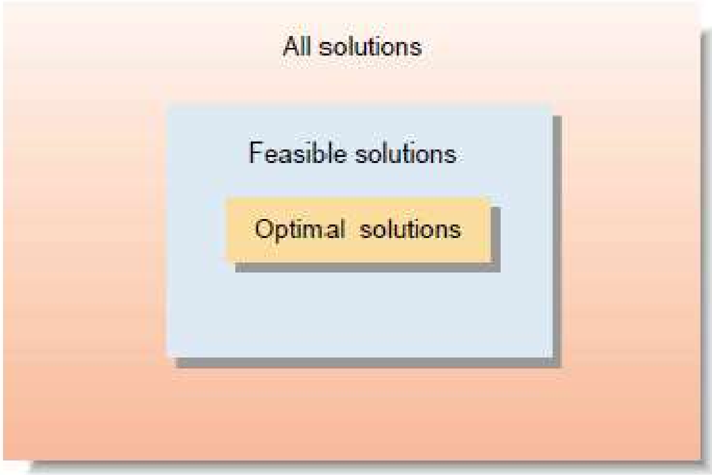


Figure II.2: Relation entre les différents types de solution d'un PL.

Le nombre de solutions réalisables d'un PL est soit 0, soit 1, soit une infinité. Il en va de même du nombre de solutions optimales d'un PL qui est soit 0, soit 1, soit une infinité. Donc, un PL peut se trouver dans une des trois situations mutuellement exclusives:

- Il n'a aucune solution réalisable. Par exemple, le PL suivant n'en a pas:

$\boldsymbol{Max}\ Z = x_1 + 4x_2$
$Sujet$ à:
$x_1 + x_2 = -2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

puisque l'on ne peut avoir $0 \leq x_1 + x_2 = -2$.

- Il n'a pas de solution optimale car la fonction objectif n'est pas majorée sur ℝ. Par exemple, le PL

$\boldsymbol{Max}\ Z = x_1$
$Sujet$ à:
$x_1 - x_2 = 2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

possède une famille infinie de solutions réalisables $(\alpha + 2, \alpha)^t$ pour $\alpha \geq 0$, mais la valeur de la fonction objectif $x_1 = \alpha + 2$ n'a pas de majorant car elle tend vers l'infini en faisant tendre α vers l'infini.

- Il a une (ou des) solution(s) optimale(s). Par exemple:

$\boldsymbol{Max}\ Z = x_1 + x_2 +$
$Sujet$ à:
$x_1 + x_2 = 2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Il est facile de voir que la solution optimale est $x_1^* = 2, x_2^* = 0$.

Si un PL n'est ni non réalisable ni non borné alors il a une solution optimale. Par conséquent, résoudre un PL consiste à préciser dans laquelle des trois situations il se trouve. De plus, s'il a une solution optimale, il faut l'expliciter.

Si un PL (de forme standard) a deux solutions réalisables distinctes *x*, *y* alors *(x + y)/2* est une solution réalisable différente de *x* et de *y*. En effet:

$$\frac{(x+y)}{2} \geq 0$$
et
$$A\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}(Ax+Ay) = \frac{1}{2}(b+b) = b$$

8. Géométrie des programmes linéaires

Les programmes linéaires possèdent une structure géométrique simple qui permet de simplifier leur résolution. Résoudre un programme linéaire consiste à déterminer les valeurs des variables qui permettent d'optimiser la fonction économique.

Il existe diverses techniques de résolution parmi lesquelles la méthode graphique (géométrique) se montre à l'évidence la plus rapide et la plus simple mais aussi la plus limitée, car dés lors que le nombre de variables de décision ou de contraintes dépasse 2, elle devient impraticable. C'est pourquoi divers chercheurs se sont efforcés de mettre au point une méthode de calcul algorithmique qui permet de détecter la solution optimale (si elle existe) quel que soit le nombre des variables et des contraintes.

Bien que très efficace, cette méthode connue sous le nom d'algorithme du simplexe, exige des calculs longs et fastidieux. C'est pourquoi ceux-ci sont de plus en plus confiés à l'outil informatique.

La compréhension des principes de résolution graphique est une aide précieuse pour, en amont, analyser et formaliser le problème et pour, en aval, interpréter et exploiter la solution obtenue. Également, la démarche algorithmique présente en elle-même un intérêt formateur non négligeable.

8.1. Exemple de représentation graphique d'un PL

Pour illustrer la géométrie des programmes linéaires et indiquer comment les problèmes à deux variables peuvent être résolus graphiquement, considérons le PL suivant:

Maximiser = $0.65M + 0.45Y$
Sujet à:
$2M + 3Y \leq 400\,000$
$3M + 1.5Y \leq 300\,000$
$M \leq 90\,000$
$M, Y \geq 0$

où M et Y représente, respectivement, la quantité produite et vendue par mois du produit *P1* et produit *P2*.

Supposons que nous construisions un système de coordonnées avec M mesuré sur l'axe horizontal et Y mesuré sur l'axe vertical, comme le montre la figure II.3. Chaque point du plan M, Y correspond à une combinaison de produits ou à un plan de production. Les valeurs des coordonnées de chaque point représentent des valeurs concevables, mais pas nécessairement physiquement possibles, pour les variables. De plus, chaque combinaison possible de produits est représentée par un point dans le plan M, Y. La meilleure solution est le point qui rend la fonction objectif aussi grande que possible tout en satisfaisant toutes les contraintes.

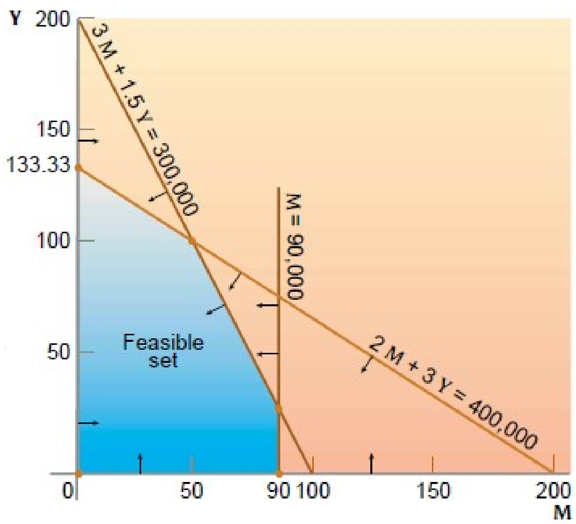
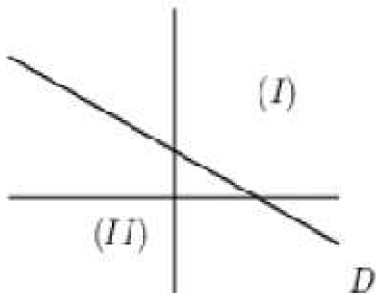


Figure II.3: Représentation graphique d'un PL: l'unité de mesure est de 1000 pour les deux axes *M* et *Y*.

8.2. Régionnement du plan

Le régionnement du plan revient à étudier le signe de $ax + by + c$ avec $(a\,, b) \neq (0, 0)$. Si on considère la droite D dont une équation est $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, cette droite partage le plan en deux demi-plans (I) et (II) de frontière D:

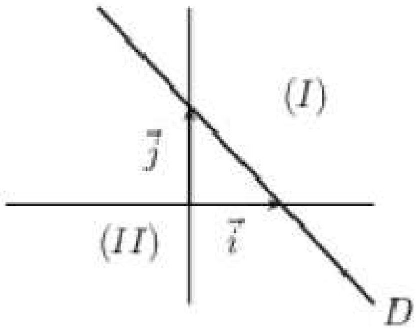
- Pour tout point *M(x, y)* situé sur *D*, on a $ax + by + c = 0$.
- – Pour tous les points *M(x, y)* situés dans le demi-plan (I), $ax + by + c$ a le même signe et si $ax + by + c > 0$ (respectivement < 0) alors tous les points *N(x, y)* situés dans le demi-plan (II) vérifient $ax + by + c < 0$ (respectivement > 0).



<u>Exemple</u>

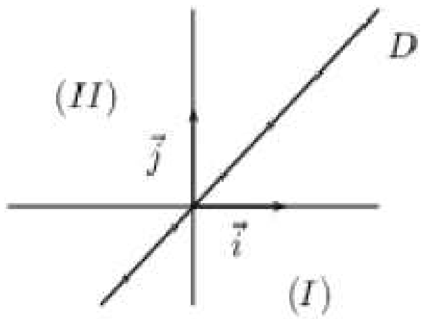
- Signe de $x + y - 1$:

  On trace la droite d'équation x+y −1 = 0. À l'origine, $x+y -1 = (0)+(0)-1 = -1 < 0$ donc pour tous les points *M(x, y)* situ´es dans le demi-plan (II), $x + y - 1 < 0$ et pour tous les points *N(x, y)* situés dans le demi-plan (I), $x + y - 1 > 0$. Pour les points *P(x, y)* de la droite *D*, $x + y - 1$ prend la valeur 0.



- **Signe de −x + y :**

  On trace la droite D d’´equation $-x + y = 0$, cette droite contient l’origine du repère. Pour le point $A(1, 0)$, $x - y = 1 > 0$ donc pour tous les points $M(x, y)$ situés dans le demi-plan (I), $x - y > 0$ et pour tous les points $N(x, y)$ situés dans le demi-plan (II), $x - y < 0$. Pour les points $P(x, y)$ de la droite D, $x - y$ prend la valeur 0.



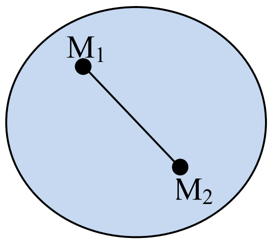
8.3. Rappel mathématique sur la notion de convexité

Définition 1: Ensemble convexe

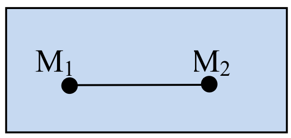
Un ensemble E est dit ***convexe*** si $\forall\ M_1$ et M_2 deux points quelconques de E, alors tous les points du segment $[M_1, M_2]$ appartiennent à E, i.e. $\forall\ 0 \le \lambda \le 1,\ \lambda M_1 + (\lambda - 1)M_2 \in E$.

<u>Exemple d'ensemble convexes</u>

- Le disque est un ensemble convexe

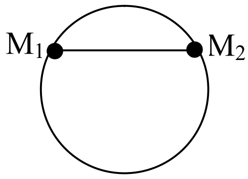


-
- Le rectangle est un ensemble convexe

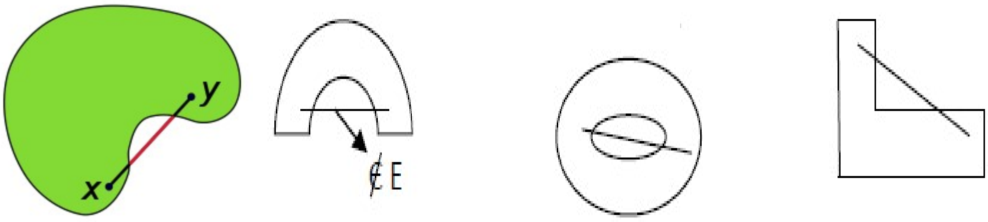


<u>Exemple d'ensemble non convexes</u>

- Le cercle n'est pas un ensemble convexe, car les points du segment $]M_1, M_2[$ n'appartiennent pas au cercle.



- Les ensembles suivants ne sont pas convexes



Théorème 1

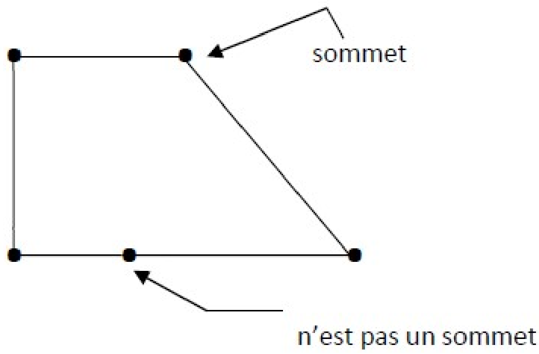
L'intersection des ensembles convexes est un ensemble convexe ou **polyèdre** (ensemble fermé et borné).

Définition 2:

Le demi espace formé par des points de coordonnées x_1, x_2, ..., x_n défini les inégalités suivantes: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$ est un ensemble convexe.

Définition 3: Sommet d'un convexe

On appelle *sommet d'un convexe* tout point qui n'appartient à aucun vrai segment contenu dans le convexe.



Définition 4: Point extrême

On appelle *point extrême*, tout point $x \in E$ (ensemble convexe) s'il ne peut être exprimé comme combinaison linéaire de deux autres points de *E*, autrement dit s'il n'existe pas de couple $(x_1, x_2) \in E$ tel que : $x = \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2$ pour tout λ: $0 \leq \lambda \leq 1$.

L'optimum d'une fonction linéaire $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est atteint en au moins dans un point extrême (sommet). S'il est atteint en 2 points x_1 et x_2 alors tous les points du segment $[x_1\ x_2]$ sont optimaux.

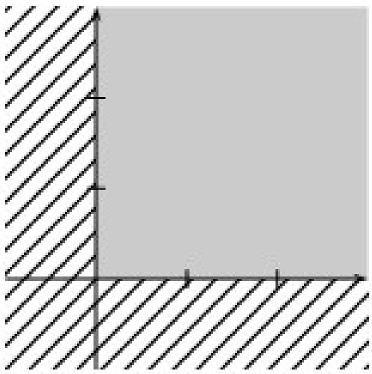
8.4. Résolution de systèmes d'inéquations – Exemples

<u>Exemple 1</u>

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Comme $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$, les points $M(x_1, x_2)$ seront choisis dans le quart du plan:

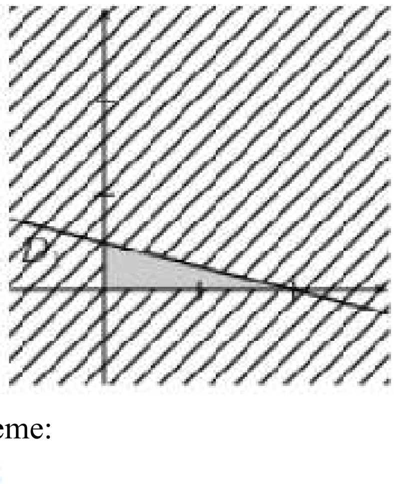


L'ensemble des solutions est représenté par la surface grise.

On considère ensuite le système partiel:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \end{cases}$$

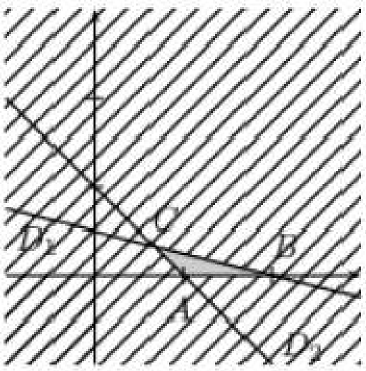
On trace la droite D_1 d'´equation $x_1 + 4x_2 = 2$. Comment déterminer le demi-plan qui convient ? Il suffit de prendre un point quelconque du plan et d'observer si ses coordonnées vérifient l'inéquation. Si c'est le cas, le point se situe dans le bon demi-plan. Considérons par exemple l'origine, $x_1 + 4x_2 = 0 + 4 \times 0 = 0 \leq 2$ donc l'origine est solution et tous les points situés dans le demi-plan contenant l'origine sont solutions.



On considère ensuite le système:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \end{cases}$$

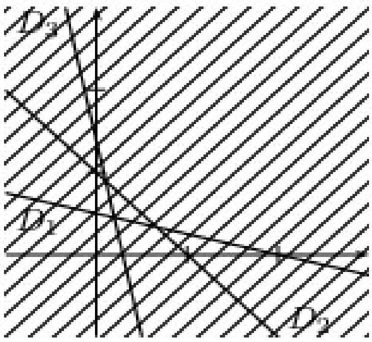
On trace la droite D_2 d’´equation $-x_1 - x_2 = -1$. Considérons l’origine, $-x1 - x2 = 0 - 0 = 0 > -1$ donc l’origine n’est pas solution, les solutions du système sont par conséquent les points du triangle *ABC* et son intérieur avec *A(1, 0)*, *B(2, 0)* et $C\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



On considère enfin le système de départ:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

On trace la droite D_3 d’´equation $6x_1 + x_2 = 2$. Considérons le point origine, $6x_1 + x_2 = 6 \times 0 + 0 = 0 < 2$ donc l’origine est solution de l’inéquation. On sélectionne le demi-plan qui convient et on observe finalement que le système n’admet pas de solution (la partie grise est inexistante).



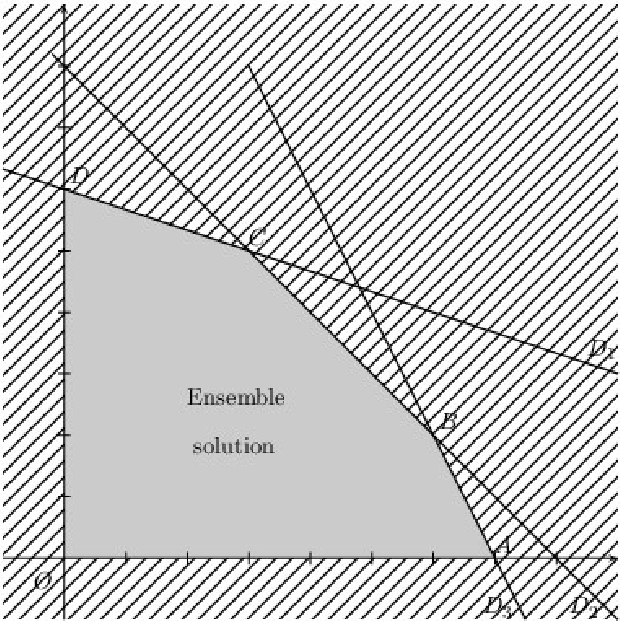
Exemple 2

On considère le système suivant:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

Soient les droites d’´equations respectives D_1: $x_1 + 3x_2 = 18$, D_2: $x_1 + x_2 = 8$ et D_3: $2x_1 + x_2 = 14$.

L’ensemble solution est un polyèdre convexe limité par la ligne polygonale *OABCD*.



8.5. Résolution graphique d'un PL

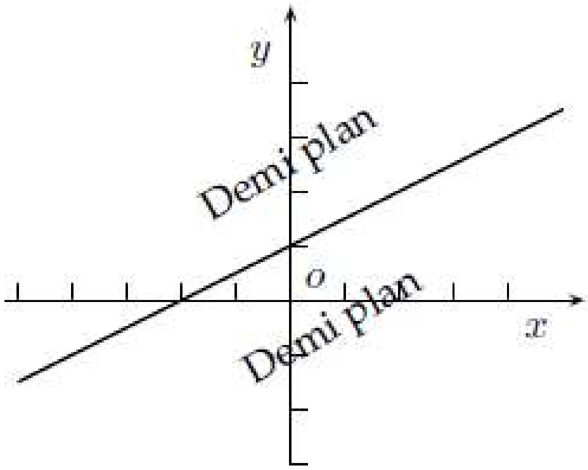
Dans cette section nous présentons une technique de résolution de programme linéaire à deux variables x_1 et x_2. Dans ce cas on peut utiliser une représentation graphique du programme linéaire. La représentation graphique sera utile pour acquérir une compréhension intuitive des principes de base de la programmation linéaire. La formulation canonique d'un programme linéaire à deux variables peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = \mathrm{a}_0 x_1 + \mathrm{b}_0 x_2 \\ \quad \mathrm{a}_1 x_1 + \mathrm{b}_1 x_2 \leqslant \mathrm{c}_1 \\ \quad \mathrm{a}_2 x_1 + \mathrm{b}_2 x_2 \leqslant \mathrm{c}_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad x_1 \ , \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = \mathrm{a}_0 x_1 + \mathrm{b}_0 x_2 \\ \quad \mathrm{a}_1 x_1 + \mathrm{b}_1 x_2 \geqslant \mathrm{c}_1 \\ \quad \mathrm{a}_2 x_1 + \mathrm{b}_2 x_2 \geqslant \mathrm{c}_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad x_1 \ , \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

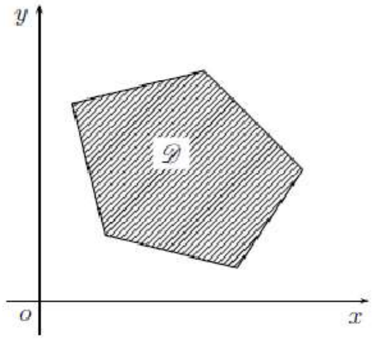
8.6. La construction de la région réalisable

Chacune des équations $a_i x_1 + b_i x_2 = c_i$ définit une droite qui partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2 d'équation :

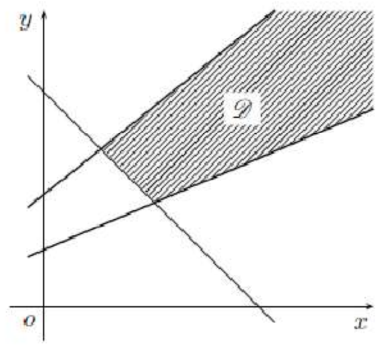
$$(\mathrm{P}_1) \quad \mathrm{a}_i x_1 + \mathrm{b}_i x_2 \geqslant \mathrm{c}_i, \qquad (\mathrm{P}_2) \quad \mathrm{a}_i x_1 + \mathrm{b}_i x_2 \leqslant \mathrm{c}_i$$



Chaque contrainte détermine l'un des deux demi-plans (P_1) ou (P_2) que l'on trouvera en vérifiant si un point particulier (l'origine (0; 0) par exemple) est contenu dedans ou non. L'intersection de tous les demi-plans correspondant aux contraintes constitue l'ensemble des points réalisables: ce sont les solutions communes à toutes les contraintes. Cet ensemble correspond à une région $\mathscr{D}$ du plan et est souvent appelée région réalisable. Cette région est parfois vide ou non borné.



Région borné



Région non borné

8.7. La recherche d'une solution optimale

Nous venons de construire la région réalisable d'un programme linéaire à deux variables. Cet ensemble contient un nombre infini de solutions réalisables. Il reste à repérer, parmi ces solutions réalisables celle(s) qui donne(nt) à z la meilleure valeur.

En fixant z à une valeur p choisie arbitrairement, on obtient la droite:

$$(\mathrm{D}_p) \quad \mathrm{a}_0 x_1 + \mathrm{b}_0 x_2 = p$$

Cette droite est appelé **droite d'iso-valeur** de fonction z. Elle représente les points du plan qui donnent à z la valeur p.

On s'intéresse à la famille des droites (D_p) (p paramètre). Ce sont toutes des droites parallèles de pente : $-\frac{a_0}{b_0}$, que l'on peut écrire :

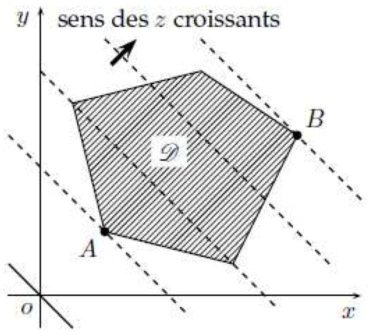
$$x_2 = -\frac{\mathrm{a}_0}{\mathrm{b}_0} x_1 + \frac{p}{\mathrm{b}_0} \qquad (\text{si } \mathrm{b}_0 \neq 0)$$

Ici $y_p = \frac{p}{b_0}$ est l'ordonnée à l'origine de la droite (D_p). Ainsi, on a :

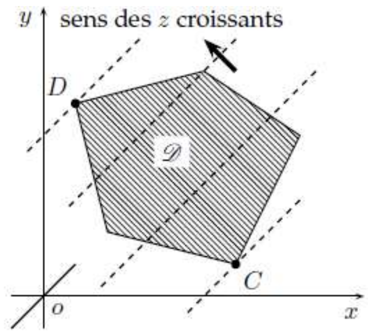
$$\text{Si} \quad b_0 > 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} < y_{p_2}$$

$$\text{Si} \quad b_0 < 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} > y_{p_2}$$

- Si $b_0 > 0$, maximiser z revient à maximiser p et donc y_p. Donc le maximum de z est obtenu pour la droite ayant au moins un point commun avec la région réalisable et ayant une ordonnée à l'origine la plus *élevée* possible.

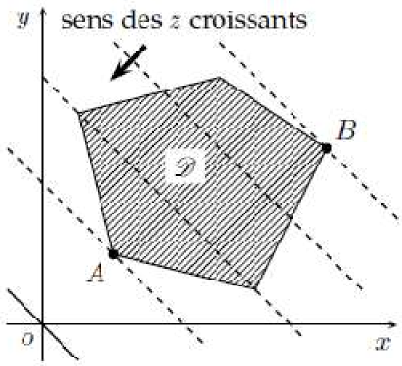


Cas $b_0 > 0$ et $a_0 > 0$

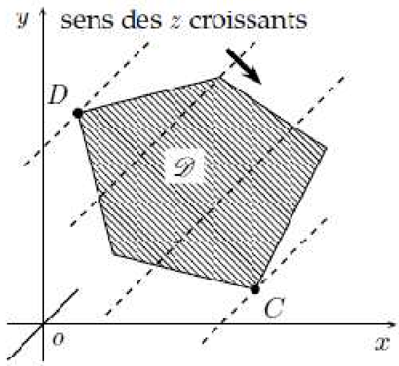


Cas $b_0 > 0$ et $a_0 < 0$

- Si $b_0 < 0$, maximiser z revient à maximiser p et donc à minimiser y_p. Donc, le maximum de z est obtenu pour la droite ayant au moins un point commun avec la région réalisable et ayant une ordonnée à l'origine la plus *basse* possible.



Cas $b_0 < 0$ et $a_0 > 0$



Cas $b_0 < 0$ et $a_0 < 0$

Tous les points sur une même droite assurent la même valeur pour z. Quand on passe d'une droite à une autre, les valeurs de z varient : ils augmentent si on se déplace dans le sens du vecteur normal $\vec{n}(a_0, b_0)$ aux droites iso-valeurs: d'où la signification de la flèche indiquant le « sens des z croissants ».

8.8. Principes de la méthode graphique

La méthode de résolution graphique d'un PL est limitée à 3 variables. Nous l'illustrons par la suite avec deux variables.

Pour résoudre graphiquement un PL, les contraintes doivent être traitées comme des équations.

Théorème 2:

Soit le plan R_2 muni d'un repère habituel *(o, i, j)* orthonormé direct.

Toute contrainte de la forme $ax_1 + bx_2 \leq c$ a pour solutions l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x1 , x2)$ situé dans l'un des demi plan déterminé par la droite (D) d'équation $ax_1 + bx_2 = c$. En traçant tous les demi-plans relatifs aux contraintes l'intersection donne le domaine des solutions admissibles (réalisables).

Généralement il y a quatre étapes à suivre pour résoudre un programme linéaire en utilisant la méthode graphique:

A. Représenter graphiquement les droites (équations provenant des inéquations) c.-à-d. Tracer les contraintes (fonctionnelles et de non-négativité) et déterminer le demi-plan fermé satisfaisant chaque contrainte.

B. Déterminer la région des solutions réalisables (région de faisabilité); c'est l'intersection entre tous les demi-plans satisfaisant les différentes contraintes.

C. Tracer le vecteur de coûts $\vec{C}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ de la fonction objective.

D. Remplacer successivement les coordonnées de chaque point de la région dans la fonction objective afin de rechercher la (les) solution(s) optimale(s) (si elle existe).

Trois situations possibles peuvent résulter de l'intersection des demis plans :

1. L'intersection donne un domaine ou la fonction objective est majorée sur cet ensemble et par conséquent le Pl admet une solution optimale (qui est un sommet du polyèdre) non nécessairement unique.
2. Un domaine non vide mais la fonction objective n'est pas majorée sur ce domaine et le max de Z = $+\infty$.
3. Le domaine est vide = ø et le PL n'a pas de solutions.

Exemple 1

Soit le PL suivant, qu'on interprétera comme le calcul des quantités à produire x_1 et x_2 de deux produits pour maximiser un profit z.

$Max\ z = x_1 + 2x_2$

Sujet à:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ce PL est bien sous forme canonique. En utilisant les notations matricielles, on peut écrire:

$m=2$, $n=2$, $c=(1, 2)$, $x=(x_1, x_2)^T$, $b=(6, 3)^T$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Pour résoudre graphiquement ce PL à deux variables, on procède comme suit:

- On trace dans le plan les axes des coordonnées pour les valeurs positives de x_1 et x_2. On finit de délimiter le domaine des solutions réalisables, qui forme un polygone convexe, en traçant les droites d'équations $x_1 + x_2 = 6$ et $x_2 = 3$ (figure II.4).
- Pour chaque droite, on indique par des flèches le demi-plan à conserver. On peut aussi hachurer les demi-plans interdits, mais la figure est souvent moins lisible.

  Règle pratique : Pour savoir quel est le demi plan qui correspond à la contrainte il suffit de prendre un point particulier **O** (origine des axes) et de contrôler si ses coordonnées (0 , 0) vérifient la contrainte ,dans le cas vrai le demi plan contenant ce point convient sinon c'est l'autre demi plan qui convient.

- On trace le vecteur de coûts $\vec{c}\binom{1}{2}$.
- On trace la droite de profit $z = 0$. Son intersection avec le domaine des solutions réalisables est réduite au point O et correspond à la solution triviale où on ne produit rien, ce qui ne rapporte rien. Une droite d'équation $z = k$, où k est une constante entre 0 et 9 (exclus) donne par intersection avec le domaine tout un segment de plans de production possibles, ayant le même profit k On peut augmenter k jusqu'à 9, ce qui donne la solution correspondant au point J : $x_1 = 3$, $x_2 = 3$. Cette solution est optimale, car si on augmente encore k, on sort du domaine. En remplaçant dans le PL les variables par leurs valeurs, on peut vérifier le coût et le respect des contraintes.

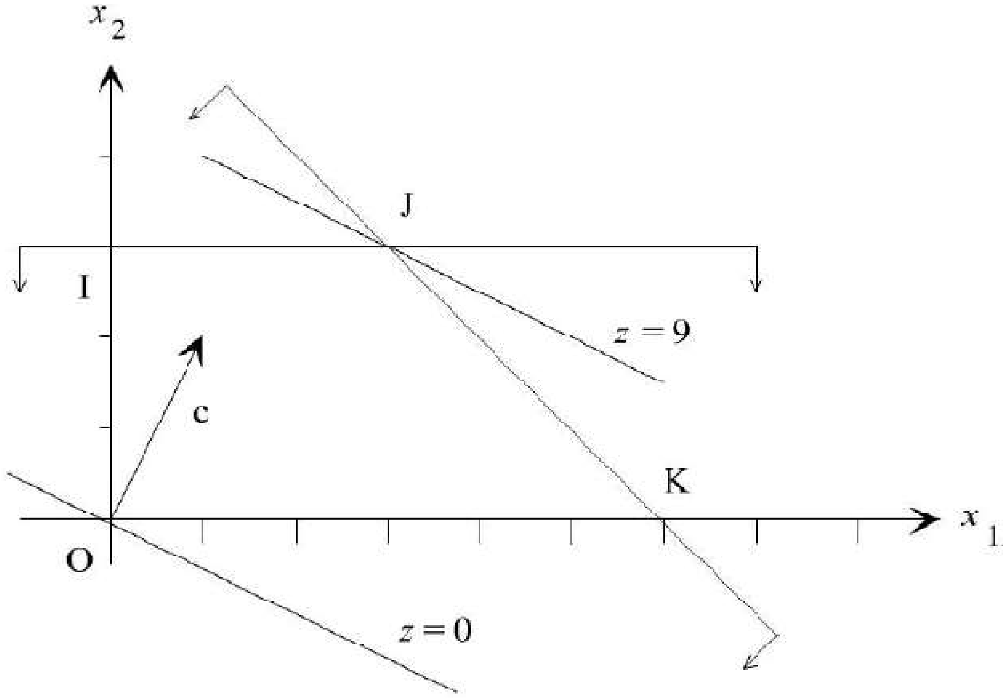


Figure II.4: Exemple de résolution graphique.

On peut formuler sur la figure des remarques générales.

- Les contraintes de positivité confinent les solutions dans le quart de plan positif et chaque autre contrainte définit un demi-espace (ici un demi-plan). L'intersection de tous ces espaces forme un polygone convexe non vide, ici *OIJK*.
- La convexité signifie que pour deux points quelconques A et B du polygone, le segment $[A, B]$ est contenu dans le polygone. Pour un nombre quelconque n de variables, on parle de polyèdre convexe. Pour k croissant, les droites d'équation $z = k$ forment une famille de droites parallèles. z augmente dans la direction du vecteur c de la fonction-objectif.
- L'optimum x^*, ici unique, est atteint au sommet $J = (3, 3)$ du polyèdre. Le coût optimal correspondant est $z^* = 9$.
- Les cas spéciaux suivants pourraient se produire. En supprimant $x_1 + x_2 \leq 6$, le domaine des solutions serait non borné, ainsi que l'optimum.
- L'optimum peut cependant être fini même si le domaine est non borné : ce serait le cas pour $c = (-1, 2)$, qui donnerait le point I.

- Si on ajoutait la contrainte $x_1 - x_2 \leq -4$, le polyèdre serait vide et il n'y aurait aucune solution réalisable.
- Enfin, si on maximisait $z = x1 + x2$, il y aurait plusieurs optima (tous les points de l'arête *JK*).
- Remarquons cependant que l'ensemble des points optimaux, s'il est non vide, comprend toujours un sommet du polyèdre.

Pour un problème réel comme un plan de production, le domaine n'est normalement pas vide car il y a au moins une solution: le plan de production actuel de l'entreprise. De plus, l'optimum est borné en pratique à cause de limites sur les ressources. Dans un problème réel, l'absence de solution indique en général un problème sur-contraint, tandis que l'oubli d'une contrainte peut donner un optimum non borné. Une erreur de saisie du modèle dans un logiciel, comme une inversion de signe, peut également produire ces phénomènes. Dans tous ces cas anormaux, il faut revoir soigneusement la formulation.

Si on est bon dessinateur, la résolution graphique est encore possible pour trois variables: les contraintes définissent des demi-espaces dont l'intersection forme un polyèdre à trois dimensions (une sorte de cristal), et les solutions de profit z constant forment une famille de plans parallèles. Il est clair qu'il faut utiliser une autre méthode en présence de plus de trois variables. C'est le but de la résolution algébrique du chapitre suivant.

<u>Exemple 2</u>

Résolution graphique du PL suivant :

$$Max\ z = x_1 + 2x_2$$

Sujet à:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- On représente dans un plan ($x_1\ O\ x_2$) l'ensemble des solutions réalisables.
- On travaillera dans le premier quadrant selon les contraintes de positivité ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$).
- On trace les droites relative aux contraintes: *D1*: $x_1 + 3x_2 = 6$ *(0, 2) et (6, 0)*

D2: $-x_1 + x_2 = 1$ *(0, 1) et (–1, 0)*

D3: $2x_1 - x_2 = 4$ *(0, –4) et (2, 0)*

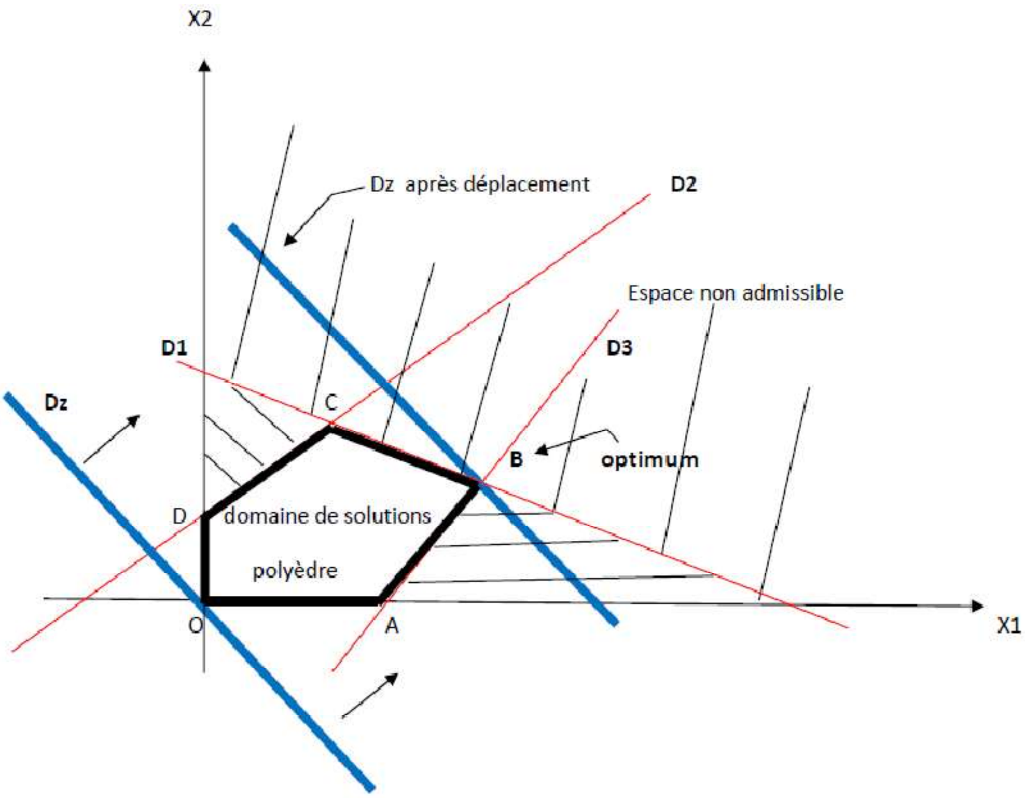


Figure II.5: Résolution graphique du PL de l'exemple 2.

Détermination de l'optimum

1er méthode: Énumération complète des sommets

Sommets du polyèdre	Coordonnées	Valeur de la fonction objective Z
O	*(0, 0)*	*0*
A	*(2, 0)*	*2*
B est le point de $D1 \cap D3$	*(18/7, 8/7)*	*34/7 = 4.85*
C est le point de $D1 \cap D2$	*(3/4, 7/4)*	*17/4 = 4.25*
D	*(0, 1)*	*2*

Donc l'optimum est le sommet *B* (point extrême) dans lequel la fonction *Z* est maximale et est égale à 4.85.

2ième Méthode

Pour gagner du temps par rapport à la première méthode on choisit parmi les solutions admissibles une solution qui soit optimale, on procède comme suit:

- On commence par tracer la droite *Dz* relative à la fonction objective *Z* au point initial *O* pour lequel Z = 0:
  - $Z = x_1 + 2x_2 = 0 \qquad x_2 = -1/2\, x_1$.
  - on choisit 2 points pour tracer *Dz (0, 0) et (1, -1/2)*
- On déplace la droite *Dz* parallèle à elle-même tant que l'intersection de la droite avec le polyèdre de solution n'est pas vide. Le déplacement s'arrête lorsque la droite n'a plus qu'un seul point de contact (ou une arête de contact) avec ce polyèdre.
- On calcule les coordonnées de ce point ainsi que la valeur de la fonction objective dans ce point (voir figure III.5).

Exemple 3 :

Soit à résoudre graphiquement le PL suivant :

$$\begin{aligned}&Max\ z = 2x_1 + 5x_2\\ &\text{Sujet à:}\\ &\qquad -3x_1 + 2x_2 \leq 6\\ &\qquad x_1 + 2x_2 \geq 2\\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

1. On trace les droites D1 et D2 d'équation relative aux contraintes du PL:

   D1: (0, 3) et *(–2, 0); D2: (0, 1)* et *(2, 0)*

2. Le domaine de solutions obtenu est ouvert (*espace non borné*). Solution illimitée *Z* tend vers +∞.

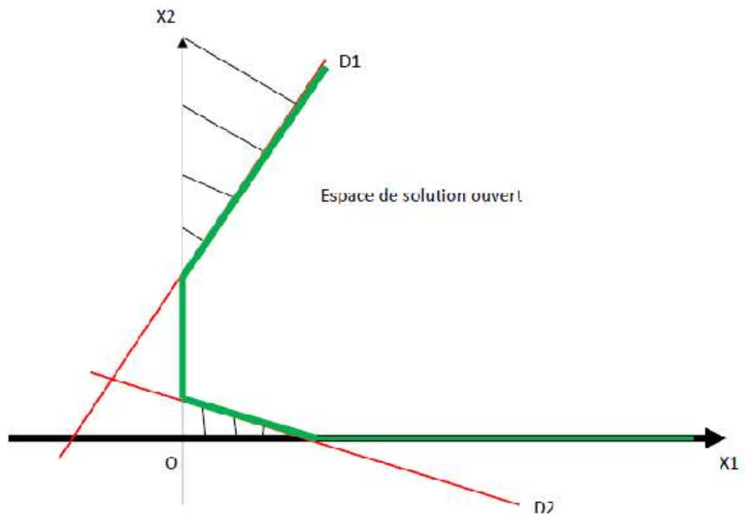


Figure II.6: Résolution graphique du PL de l'exemple 3.

Exemple 4 :

Soit à résoudre graphiquement le PL suivant:

$$\begin{aligned}&Max\ z = 2x_1 - 3x_2\\ &\text{Sujet à:}\\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 6\\ &\qquad x_1 - x_2 \geq 1\\ &\qquad 2x_1 - x_2 \geq 6\\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

3. On trace les droites *D1, D2, D3* relative aux contraintes:

   D1:(0, 3) et (2, 0); D2: (0, –1) et (1, 0); D3: (0, –6) et (3, 0)

4. On obtient un *convexe vide*. Quel que soit la fonction *Z* le problème est impossible. Contraintes impossibles ou contradictoires.

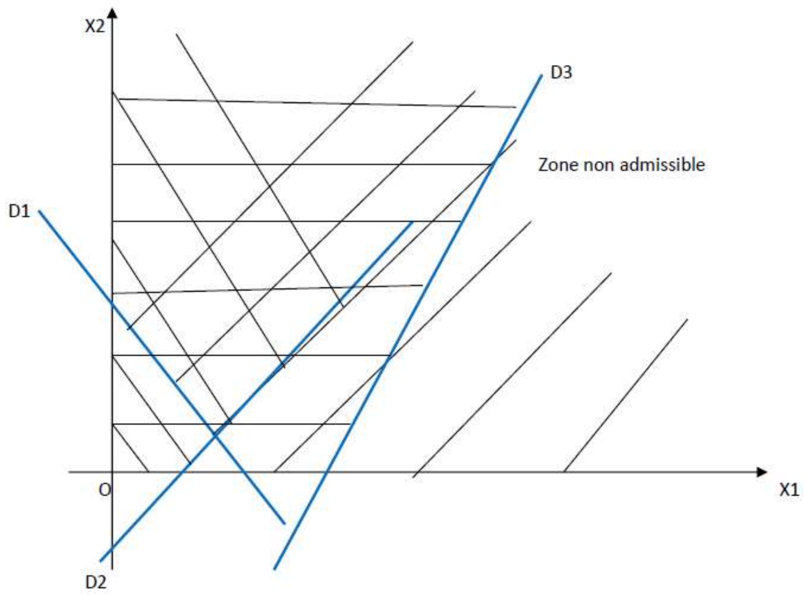


Figure II.7: Résolution graphique du PL de l'exemple 3.

9. La méthode du gradient

Le vecteur (c_1, c_2) est le gradient de la fonction $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_{12}$, avec c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, qui est perpendiculaire à la droite d'équation $c_1x_1 + c_2x_{12} = z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

La méthode du gradient est fondée sur l'observation suivante: si on fait avancer la droite d'équation $c_1x_1 + c_2x_{12} = z$ dans le sens du gradient et perpendiculairement à ce dernier mais en faisant en sorte que la droite touche le domaine réalisable $R = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, alors on augmente la valeur de *z*.

Définition

Un ensemble $R \in \mathbb{R}^n$ est dit borné s il existe un scalaire $M > 0$ tel que $-M \leq x_j \leq M$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$.

<u>Exemple 1:</u>

Soit le PL suivant qui consiste à déterminer les quantités à fabriquer x_1 et x_2 de deux types de produits T_1 et T_2 en utilisant des matières premières M_1, M_2 et M_3 dont les quantités en tonnes disponibles sont, respectivement, 13, 42 et 24, afin de maximiser une fonction objectif qui est sujette à un certaines nombre de contraintes de production:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{Max}\ z = 10x_1 + 12x_2 \\ Sujet \text{ à :} \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 42 \\ x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(II.0)}$$

La solution graphique de ce PL est illustrée dans la figure II.8. Ce PL admet comme solution optimale le point *C(10, 3)*, i.e. $x_1=10$, $x_2=3$, avec $z=136$. L'application de la méthode du gradient à ce PL est illustrée dans la figure II.9:

- D'abord, pour $z < 0$, la droite d'équation $10x_1 + 12x_2 = z$ ne touche pas le domaine réalisable *R*.

- Pour $z = 0$, la droite d'équation $10x_1 + 12x_2 = 0$ touche le domaine réalisable R à l'origine.
- Lorsque la droite d'équation $10x_1 + 12x_2 = z$ touche le point de coordonnées $x_1 = 0, x_2 = 8$ alors z prend la valeur 96.
- Continuons à déplacer la droite dans le sens du gradient. A un moment donné on va toucher le point de coordonnées $x_1 = 13, x_2 = 0$ avec $z = 130$, puis le point de coordonnées $x_1 = 6, x_2 = 6$ avec $z = 132$, puis enfin le point de coordonnées $x_1 = 10, x_2 = 3$ avec $z = 136$.
- On ne peut plus continuer le processus sinon on sera amené à quitter le domaine réalisable R. Le dernier point rencontré est donc optimal.

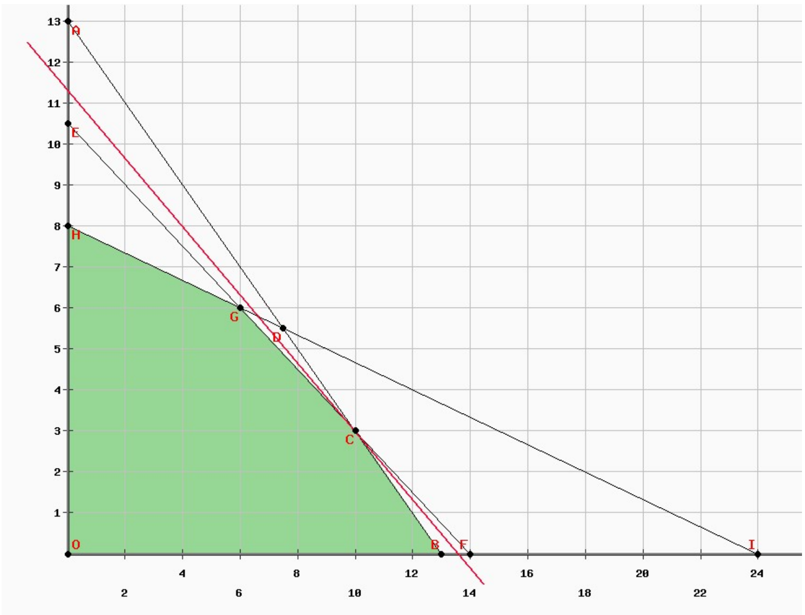


Figure II.8: Résolution graphique du PL (II.0).

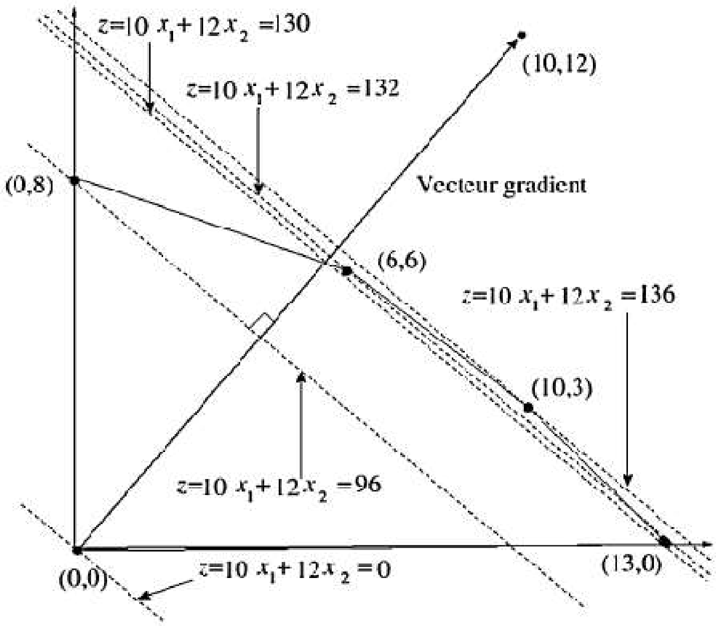


Figure II.9: illustration de la méthode du gradient.

Exemple 2:

Soit le PL:

$$\boldsymbol{Max}\; z = x_1 + 2x_2$$
$$Sujet\text{ à :}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

dont le domaine réalisable est $R = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| -x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 - x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$ représenté à la figure II.10. Ce domaine est non borné car pour tout M > 0, on a $\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix} \in R$.

Si l'on applique la méthode du gradient à ce PL, on s'aperçoit qu'on peut déplacer indéfiniment la droite d'équation $x_1 + 2x_2 = z$ dans le sens du gradient $(1,2)^t$ sans jamais quitter le domaine réalisable. Par conséquent, z est non majorée (voir figure II.11).

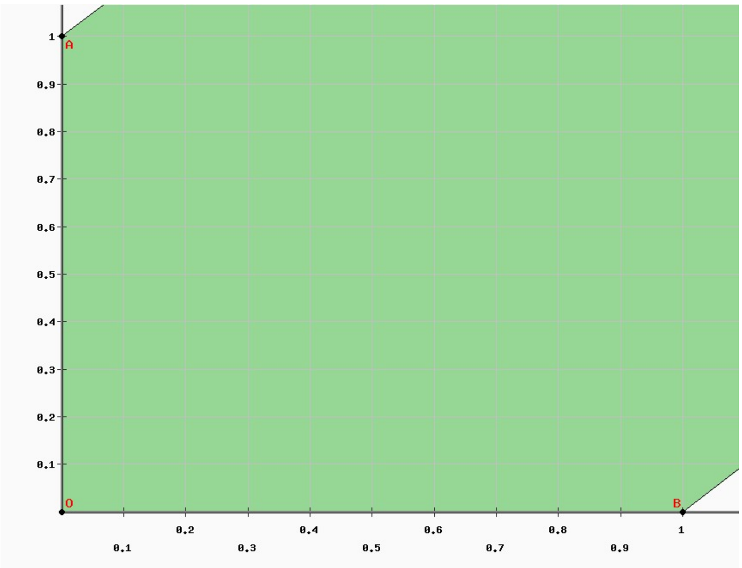


Figure II.10: Domaine réalisable non borné.

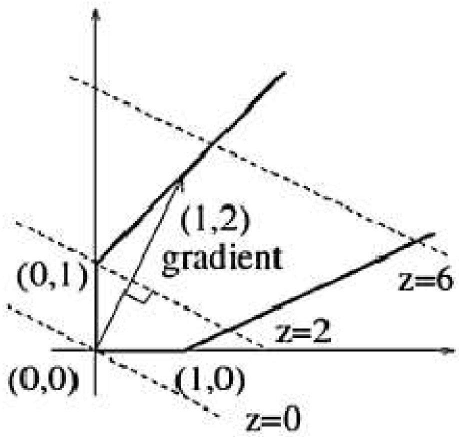


Figure II.11: Méthode du gradient appliquée à un PL avec un domaine réalisable non borné.

Remarque

Le domaine réalisable d'un PL est un ensemble fermé. Lorsqu'il est borné alors une solution optimale existe. Lorsqu'un PL non vide n'a aucune solution optimale, c'est qu'il est non borné. La réciproque n'est pas vraie: il arrive qu'un PL soit non borné avec cependant une solution optimale. Voici un exemple:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max}\ z = x_1 \\
&Sujet \text{ à :} \\
&x_1 \leq 1 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

10. Méthode Algébrique

Étant donné un PL de forme standard, la méthode algébrique consiste à écrire la fonction objectif *z* comme une équation qu'on l'ajoute au reste des équations, puis on manipule le système d'équations linéaires ainsi obtenu jusqu'à ce que, soit il n'est plus possible d'augmenter la valeur de *z*, soit on peut l'augmenter indéfiniment. Les manipulations proposées préservent l'équivalence de tous les systèmes d'équations successifs.

La résolution du PL de l'exemple 1 de la section 9 avec la méthode algébrique procède comme suit:

1. Mise du PL sous forme standard

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max}\ z = 10x_1 + 12x_2 \\
&Sujet \text{ à :} \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\
&3x_1 + 4x_2 + x_4 = 42 \\
&x_1 + 3x_2 + x_5 = 24 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

2. Récriture du PL comme un ensemble d'équations:

$$\begin{aligned}
&z = 10x_1 + 12x_2 \\
&x_3 = 13 - x_1 - x_2 \\
&x_4 = 42 - 3x_1 - 4x_2 \\
&x_5 = 24 - x_1 - 3x_2
\end{aligned} \qquad \text{(II.1)}$$

3. Si on décide de rien produire, i.e. $x_1=0$ et $x_2=0$, alors $x_3=13$, $x_4=42$ et $x_5=24$, on aura un profit $z=0$.

4. Si on fabrique uniquement de produit de type 2, i.e. $x_1=0$, alors la plus grande valeur possible pour x2 est déterminée en respectant les contraintes suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
x_3 &= 13 - x_2 \geq 0 \\
x_4 &= 42 - 4x_2 \geq 0 \\
x_5 &= 24 - 3x_2 \geq 0
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x_2 \leq 13, x_2 \leq 10.5,\ x_2 \leq 8$$

Donc, $x_2=8$ satisfait toutes les contraintes précédentes.

5. Étant donné que l'équation $x_5 = 24 - 3x_2$ a contraint x_2 à la valeur maximale *8*, on écrit un système d'équations équivalent à (II.2) mais dans laquelle on permute le rôle de x_2 et x_5, i.e. on remplace $x_5 = 24 - x_1 - 3x_2$ par:

$$x_2 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5 \qquad \text{(II.2)}$$

6. On remplace x_2 dans les trois autres équations, la première, la deuxième et la troisième de (II.1), par sa nouvelle expression en (II.2). Le nouveau système équivalent devient:

$$
\begin{aligned}
z &= 0 + 10x_1 + 12(8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5) \\
x_3 &= 13 - x_1 - (8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5) \\
x_4 &= 42 - 3x_1 - 4(8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5) \\
x_2 &= 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5
\end{aligned}
$$

Après simplification, on obtient:

$$
\begin{aligned}
z &= 96 + 6x_1 - 4x_5 \\
x_3 &= 5 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_5 \\
x_4 &= 10 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_5 \\
x_2 &= 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_5
\end{aligned}
\tag{II.3}
$$

Les systèmes (II .1) et (II.3) sont équivalents. Cette opération de passage du système (II.1) au système (II.3) est appelée, en algèbre linéaire, *un changement de base du système d'équations*. Ce dernier système indique au décideur que s'il fabrique une quantité $x_2 = 8$ du produit de type T_2 (sans fabriquer du produit de type T_1 en gardant $x_1 = 0$), il doit par conséquent consommer totalement la matière première M_3, soit $x_5 = 0$). Ce faisant, il lui restera $x_3 = 5$ de matière première M_1, $x_4 = 10$ de matière première M_2, et son profit sera $z = 96$ unités monétaires.

7. On réitère l'étape 5 et 6 pour obtenir la valeur optimale de z:

Si on augmente la valeur de x_5 le profit diminuera car le coefficient –4 de x_5 dans l'expression de z est négatif. On rappelle que x_5 est ce qui reste de la matière première M_3, une fois le programme adopté. Jusqu'à maintenant, il reste 0 tonne de M_3. Augmenter x_5 veut dire utiliser moins de M_3. Si $x_5 = 1$, ça signifie qu'on n'utilise que 23 tonnes de M_3.

Du système en (II.3) il suit que:

$$
\begin{aligned}
z &= 96 - 4 = 92 \\
x_3 &= 5 + \frac{1}{3} \\
x_4 &= 10 + \frac{4}{3} \\
x_2 &= 8 - \frac{1}{3} = \frac{23}{3}
\end{aligned}
$$

On ne pourra fabriquer que *23/3* de produits de type T_2, tirant un profit de 92 unités. Le coefficient –4 est donc le profit marginal ou relatif à la diminution d'une tonne de M_3 du programme de production.

En revanche, puisque le coût marginal de x_1 est 6, si on augmente x_1 d'une unité, son profit va augmenter de 6 unités. Jusqu'à quelles limites pourra-t-il le faire? Là aussi, ce sont des conditions analogues aux précédentes qui vont le lui dire à partir de (II.3):

$$\left.\begin{array}{r} 5-\frac{2}{3}x_1 \ \geq 0 \\ 10-\frac{5}{3}x_1 \geq 0 \\ 8-\frac{1}{3}x_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 \leq 7.5,\ x_1 \leq 6,\ x_1 \leq 24$$

Puisque le décideur cherche à augmenter x_1 le plus possible, il décide que $x_1 = 6$. C'est la 2ème condition qui a déterminé cette valeur; on va remplacer la 3ème équation de (II.3) par l'équation équivalente:

$$x_1 = 6 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5$$

et remplacer dans les trois autres équations de II.3), la première, la seconde et la quatrième, x_1 par sa nouvelle expression, pour obtenir:

$$\begin{aligned} z &= 132 - \frac{18}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 \\ x_3 &= 1 + \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_1 &= 6 - \frac{3}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 \\ x_2 &= 6 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 \end{aligned}$$

Cette décision est meilleure que la précédente: on fabrique $x_1 = 6$ du produit de type T_1 et $x_2= 6$ du produit type T_2. On aura alors consommé totalement les matières premières M_2 et M_3 ($x_4 = 0, x_5 = 0$), il restera $x_3 = 1$ de M_1 et sou profit sera $z = 132$ unités.

Il faut encore réitérer car on observe qu'on peut augmenter x_5 avec profit (son coefficient 4/5 dans z est positif: si x_5 croît d'une unité alors z aussi croît de 4/5 unité monétaire). Les conditions sur x_5 sont:

$$1 - \frac{1}{5}x_5 \geq 0, \qquad 6 + \frac{4}{5}x_5 \geq 0, \qquad 6 - \frac{3}{5}x_5 \geq 0$$

(notons que la seconde contrainte est toujours valide). Elles induisent $x_5 = 5$ et le système résultant est:

$$\begin{aligned} z &= 16 - 4x_3 - x_4 \\ x_5 &= 5 - 5x_3 + 2x_4 \\ x_1 &= 10 - 4x_3 + x_4 \\ x_2 &= 3 + 3x_3 - x_4 \end{aligned} \qquad \text{(II.4)}$$

Cette politique est encore meilleure que la précédente: on fabrique $x_1 = 10$ du produit de type T_1 et x2 = 3 du produit de type T_2. Il aura alors utilisé totalement les matières premières M_1 et M_2 ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$), il lui restera $x_5=5$ tonnes de M3 et son profit sera $z = 136$ unités.

Cette dernière politique est optimale car lorsque le fermier considère la première équation de (II.4) donnant le profit, il s 'aperçoit qu'il ne peut plus augmenter, ni x_3, ni x_4, car leurs coûts marginaux respectifs sont négatifs.

L'équivalent géométrique de cette démarche algébrique est illustré sur la figure II.8. On débute avec le point *(0, 0)*, origine du repère cartésien, puis, en trois itérations, on se déplace (en suivant les flèches en pointillé) vers le point de coordonnées *(0, 8)*, puis vers le point *(6,* *6)*, puis vers le point optimal *(10, 3)*. Ce qu'il faut remarquer est que, pour déterminer l'optimum, on n'a jamais considéré que certains points particuliers situés aux «coins» du domaine réalisable, en se déplaçant d'un point à son voisin.

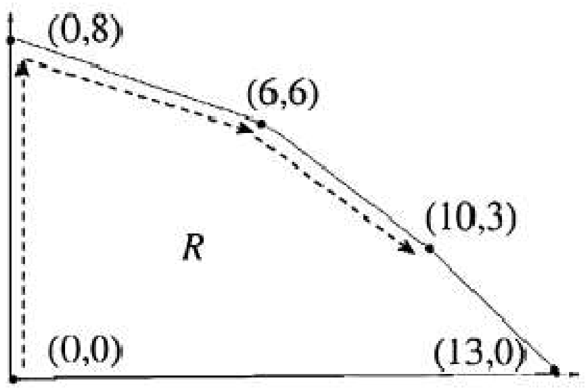


Figure II.12: Illustration de la démarche algébrique.

<u>Exemple 1</u>

$\boldsymbol{Max}\, z = x_1 + 2x_2$
Sujet à :
$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 - 2x_2 + x_4 = 1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Le système correspondant à ce PL est:

$z = 0 + x_1 + 2x_2$
$x_3 = 1 + x_1 - x_2$
$x_4 = 1 - x_1 + 2x_2$

L'application de la méthode algébrique à ce système peut s'effectuer en faisant croitre x_2 tout en maintenant $x_1 = 0$. Pour cela, il suffit de s'assurer que $x_3 = 1 - x_2 \geq 0$ et $x_4 = 1 + 2x_2 \geq 0$. La plus grande valeur possible est $x_2 = 1$. Prenons-la et réécrivons le système précédent ainsi:

$z = 2 + 3x_1 - 2x_3$
$x_2 = 1 + x_1 - x_3$
$x_4 = 3 + x_1 - 2x_3$

On n'a aucun intérêt à augmenter x_3 mais on peut augmenter x_1. Pour cela il suffit de satisfaire $x_2 = 1 + x_1 \geq 0$ et $x_4 = 3 + x_1 \geq 0$. Or, ces conditions sont toujours satisfaites. On peut donc indéfiniment augmenter x_1, et par conséquent z. Il n'y a donc pas de solution optimale car la fonction objectif z n'est pas majorée. Pour voir cela, attribuons à x_1 une valeur $\alpha \geq 0$ arbitraire. Il est facile de voir que la famille infinie de solutions définie par:

$$x(\alpha) = \begin{pmatrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = 1 + \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3 + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est réalisable pour tout $\alpha \geq 0$ et que $z = 2 + 3\alpha$ tend vers ∞ avec α.

Cette démarche est illustrée sur la figure II.13. On commence au point de coordonnées (0,0), puis on se déplace au voisin de coordonnées (0,1). Arrivés à ce point, à défaut de trouver un autre voisin, on trouve une demi—droite (en trait gras) le long de laquelle la fonction objectif z croît indéfiniment. Cette demi-droite est l'ensemble

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \middle| \alpha \geq 0\right\}$$

que l'on appellera rayon extrémal.

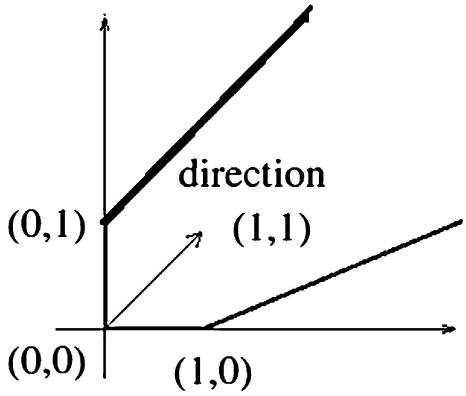


Figure II.13: Rayon extrémal du PL de l'exemple 1.