Table des matières

Résumé Ce document rédigé pour les étudiants de première année mathématiques et informatiques, c'est un support du module algèbre du deuxième semestre. Ce module contient quatre chapitres, espace vectoriel, applications linéaires, les matrices et résolution de systèmes d'équations. Le cours est diviser en plusieurs parties, dont le premier chapitre sur les espaces vectoriels est présenté ci-dessous.

Chapitre 3

Espace vectoriel et sous espace vectoriel

1 Structure d'espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit E un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $(+)$:

$$\begin{array}{rcl} (+) : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longrightarrow & x + y \end{array}$$

et d'une opération externe notée $(\cdot)$:

$$\begin{array}{rcl} (\cdot) : \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, y) & \longrightarrow & \lambda \cdot y \end{array}$$

DÉFINITION 1. *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que :*

1. $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
5. $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

REMARQUE 1. *Par la suite, et par souci de simplicité on notera λu au lieu de $\lambda \cdot u$*

Propriétés

Soit E un espace vectoriel, soit x un vecteur de E, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

1. $0_E x = 0_E$
2. $0_E \lambda = 0_E$
3. $\lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x$
4. $\lambda x = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0 \ ou \ x = 0_E$

2 Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel, et soit $F \subset E$, on dira que F est un sous-espace vectoriel (en abrege s. e. v) de E, si l'une des proprietés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $(F, +, \cdot)$ est aussi un espace vectoriel.
2. $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda u + \mu v) \in F \end{cases}$
3. $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall u, v \in F, (u + v) \in F \\ \forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u \in F \end{cases}$

On priviligiera en particulier la deuxieme propriété pour démontrer qu'un sous ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 2. *Si $0_E \neq F$ alors F ne peut pas être un sous espace vectoriel*

Exemple 1.
1. *$\{0_E\}$, E sont des sous espace vectoriel de E.*
2. *Soit $E = \mathbb{R}^2$ alors $F = \{(x, y) \ \mathbb{R}^2, y = 2x\} = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ En effet, par exemple*

$$(0, 0) \in F$$

donc

$$F \neq \emptyset$$

Soit a présent $u, v \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$u, v \in F \Longrightarrow u = (x, 2x) \ et \ v = (x', 2x')$$

et par suite

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v) &= \lambda(x, 2x) + \mu(x', 2x') \\ &= (\lambda x + \mu x', 2(\lambda x + \mu x')) \\ &= (X, 2X) \end{aligned}$$

et donc

$$(\lambda u + \mu v) \in F.$$

En conclusion F est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

Théorème 1. *L'intersection d'une famille non vide de s.e.v est un sous espace vectoriel.*

Remarque 3. *La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.*

Exemple 2. $E_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$,$E_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$,$E_1 \cup E_2$ *n'est un s.e.v car* $(1,0),(0,1) \in E_2$ *et* $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin E_1 \cup E_2$, *car* $(1,1) \notin E_1 \wedge (1,1) \notin E_2$.

3 Somme et somme directe

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. On appelle somme de E_1 et E_2, le sous-ensemble de E noté $E_1 + E_2$, défini par*

$$E_1 + E_2 = \{x \in E, x = x_1 + x_2 \text{ tel que } x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. On dira que E est somme directe de E_1 et E_2, ou que E_1 et E_2 sont supplémentaires l'un à l'autre dans E si et seulement si*

$$E_1 + E_2 = E \text{ et } E_1 \cap E_2 = 0_E$$

On notera alors

$$E = E_1 \oplus E_2$$

Proposition 1. *(E_1 et E_2 sont supplémentaires l'un à l'autre dans E) $\Longleftrightarrow$ ($\forall x \in E$ il existe un unique $x_1 \in E_1$ et il existe un unique $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$)*

Exemple 3. $E_1 = (x,0) \in \mathbb{R}^2$, $E2 = (0,y) \in \mathbb{R}^2$, $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$, E_1 *et* E_2 *sont supplémentaires.*

4 Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ par E.

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel, $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ n vecteurs de E. On dira que $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ engendrent E, ou que $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ est une famile génératrice de E si et seulement si*

$$\forall u \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + ... + \alpha_n u_n$$

On dit aussi que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$

Notation : *On note $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ est une famile génératrice de E,*
$Vect\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ *ou* $\langle\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}\rangle$

EXEMPLE 4. *Montrons que* $u_1 = (1,1)$ *et* $u_2 = (1,0)$ *engendrent* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists? \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$u = (x,y) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_1$$

et on cherche l'existance des scalaires α_1, α_2 *dans* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u = (x,y) &= \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,0) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \,; \\ y = \alpha_1. \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \alpha_1 = y \,; \\ \alpha_2 = (x-y). \end{cases}$$

DÉFINITION 5. *Soit* E *un espace vectoriel,*$u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ n *vecteurs de* E. *On dira que* $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ *sont linéairement indépendants, ou que* $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ *est une famile libre de* E *si et seulement si*

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n \in \mathbb{R},\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + ... + \lambda_n u_n = 0_E) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0.$$

si $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ *ne sont pas linéairement indépendants on dira qu'ils sont linéairement dépendants ou que* $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ *est une famile liée.*

EXEMPLE 5. *Montrons que* $u_1 = (1,1)$ *et* $u_2 = (1,0)$ *sont linéairement indépendants*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Longrightarrow \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,0) = (0,0)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \,; \\ \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

REMARQUE 4. *Dans un espace vectoriel* E, *tout vecteur non nul est libre.*

DÉFINITION 6. *Soit* E *un espace vectoriel,* $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ n *vecteurs de* E. *On dira que* $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ *est une base de* E, *si et seulement si* $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ *est une famille libre et génératrice de* E.

EXEMPLE 6. *Soit* $u_1 = (1,1)$ *et* $u_2 = (1,0)$, *alors* $\{u_1, u_2\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 7. $\{(1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0)...(0,0,0,...,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$ *dite base canonique. Par exemple* $\{(1,0),(0,1)\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 8. *La dimension d'un espace vectoriel est égal au cardinal de sa base. On note la dimension de* E *par* $dimE$.

EXEMPLE 7. $dim\mathbb{R}^2 = 2$, $dim\mathbb{R}^n = n$. *On pose par convention* $dim 0_E = 0$.

Propiétés

THÉORÈME 2. *Dans un espace vectoriel E de dimension n, une base de E est une famille :*

1. *Libre*
2. *Génératrice*
3. *Contenant n vecteurs*

et toute famille de vecteurs vérifiant deux des trois propriétés citées est une base.

EXEMPLE 8. *Pour montrer que $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice car $dim\mathbb{R}^3 = cardB = 3$, B est libre car :*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(0,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME 3. *Soit E un espace vectoriel de dimension (finie) n, et soit F un s.e.v de E, alors*

$$dimF \leq dimE$$

et si $dimF = dimE$ alors $E = F$.

THÉORÈME 4. *Soit E un espace vectoriel, $E1$ et $E2$ deux sous espaces vectoriels de E, alors*

$$dim(E_1 + E_2) = dimE_1 + dimE_2 - dim(E_1 \cap E_2)$$

et en particulier

$$dim(E_1 \oplus E_2) = dimE_1 + dimE_2$$