Ex1 : Déterminer la transformée en z de la suite échelon unité déterminée par :
u(n) = 1 pour tout n > 0.
On a :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n}$$

Or on sait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n} = \frac{1}{1-a}$$

On en déduit donc que :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Ex2 : Déterminer la transformée en z de la suite exponentielle déterminée par :
x(n) = $a^{\mathbf{n}}$.u(n)

Réponse :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^{n}$$

Ce qui conduit à :

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Ex3 :
La transformée en z de x(n) = $a^{\mathbf{n}}$.u(n) :

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

converge pour $|az^{-1}| < 1$, soit |z| > |a|. Son domaine de convergence est donc |z| > |a|.

Ex4 : Calculer la transformée en z du produit de convolution des séquences suivantes :
x(n) = $2a^{\mathbf{n}}$u(n) et y(n) = **d**(n-1)
Il suffit de déterminer les transformées en z de x(n) et de y(n) puis de les multiplier entre elles :

$$X(z) = \frac{2}{1-az^{-1}}$$

$$Y(z) = z^{-1}$$

$$X(z) \cdot Y(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

Ex5 : Déterminer la transformée inverse de :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

La première étape consiste à factoriser le dénominateur :

La décomposition en éléments simples donne :

$$X(z) = \frac{A}{(1 - z^{-1})} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

On trouve A = 2 et B = -1 :

$$X(z) = \frac{2}{(1 - z^{-1})} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

La table permet d'obtenir :

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = 2u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$$