Series of Exercises 01
Mathematical Logic and Proofs

Exercice 1 *Which of the following expressions are propositions ? In the case of a proposition, say whether it is true or false :*

1. $\sqrt{2}$ *is an irrational number.*
2. 136 *is a multiple of* 17 *and* 2 *divides* 167.
3. 136 *is a multiple of* 17 *or* 2 *divides* 167.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n+1=5$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n+3=7$
6. *The integer* n *divides* 12.

Exercice 2 *Let* P, Q *and* R *be propositions. Give the truth table of these propositions.*

1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
2. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $\overline{P \wedge (\overline{Q \wedge R})} \Leftrightarrow Q$

Exercice 3 *Let* f *and* g *two functions of* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$*, write in terms of quantifiers the following expressions :*

1. f *never equals zero.*
2. f *is even.*
3. f *is strictly increasing function.*
4. f *is bounded.*
5. f *is less than* g.

Exercice 4 *Show which of the following propositions are true and which are false, then give their negation :*

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0 \quad \text{and} \quad x+2=0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0)$ *and* $(\exists x \in \mathbb{R}, x+2=0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y>0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y>0$

Exercice 5

1. *Using the proof by contradiction prove that :*
   - $\sqrt{2}$ *is not a rational number.*
   - *Let* $n>0$*, if* n *is the square of an integer then* $2n$ *is not the square of an integer.*
2. *Prove by induction :*
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$
3. *By contrapositive, Prove that :*
   - (n^2-1) *is not divisible by* $8 \Rightarrow n$ *is even.*

Série de TD 01
Notions de Logique

Exercice 6 *Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions ? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse :*

1. $\sqrt{2}$ *est nombre irrationnel.*
2. 136 *est un multiple de* 17 *et* 2 *divise* 167.
3. 136 *est un multiple de* 17 *ou* 2 *divise* 167.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n+1=5$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n+3=7$
6. *L'entier a divise* 12.

Exercice 7 *Soient* P, Q *et* R *des propositions. Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?*

1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
2. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $\overline{P \wedge \left(\overline{Q \wedge R}\right)} \Leftrightarrow Q$

Exercice 8 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :*

1. f *ne s'annule jamais*
2. f *est paire*
3. f *est strictement croissante*
4. f *est majorée.*
5. f *est inférieure à* g

Exercice 9 *Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses. Puis donner leur négation*

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0 \quad et \quad x+2=0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}, x+2=0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y>0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y>0$

Exercice 10

1. *En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que :*
   - $\sqrt{2}$ *n'est pas un nombre rationnel*
   - *Soit* $n>0$*, si* n *est le carré d'un entier alors* $2n$ *n'est pas le carré d'un entier.*
2. *Monter par récurrence :*
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$
3. *Par contraposée, montrer que :*
   - (n^2-1) *n'est pas divisible par* $8 \Rightarrow n$ *est pair.*