University of Badji-Mokhtar Annaba
Faculty of Technologie
Computer Science Department

Annaba 2023-2024

Mathematical Analysis 1

Series of exercies 1: the Field of real numbers

Exercise 1:

a). Let $\alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, show that : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+\alpha)^{n} \geq 1+n\alpha$

Us deduce that $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n} \geq n$

b). Let $(a,b) \in \mathbb{Q}^{+} \times \mathbb{Q}^{+}$ such that $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$

Prove that $\sqrt{a}+3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ (irrational).

Exercise 2:

1) Determine $E(x)$ for $x=-0.67,\ 2.15;\ \dfrac{13}{3}\ ;e\ ,\ \dfrac{-574}{1000}$

2) Show the following properties :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Z}, \quad E(x)+E(-x)=0 \\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \ E(x)+E(-x)=-1. \end{cases}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R} : E(\dfrac{x}{2})+E(\dfrac{x+1}{2})=E(x).$

Exercise 3:

1) Prove the following inequalitie:

- $\forall x,y \in \mathbb{R},\ \ ||x|-|y|| \leq |x+y|$
- $\forall\ x,y \in \mathbb{R} \qquad |x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|.$

2) show that $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^{2} : 1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)\,(1+|y-1|)$

Exercise 4:

Put the following sets in the form of an interval of $\mathbb{R}$ or a union of intervals.

1. $A1=\{x \in R, 2x^{2} \leq 1\}$.
2. $A2=\{x \in R, x^{3} \leq 1\}$.
3. $A3=\left\{x \in R, -1 \leq \dfrac{2x}{x^{2}+1} < 1\right\}$
4. $A4=\{x \in R, \dfrac{2}{|x-1|} > 1\}$.

Exercise 5:

For any set A define the set $-A=\{\ y \in R\ /\exists x \in A$ such that. $y=-x\ \}$.
Prove that if $A \subset R$ is non-empty and bounded then

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

Exercise 6:

Let $\quad A=\{x \in \mathbb{R} : |2x+1| \leq 5\}\ ;\quad B=\{x \in \mathbb{R}, e^{x} < \frac{1}{2}\},$
$C=.\{E(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^{*}\};\ D=\{x \in \mathbb{Q} : x^{2} < 2\}.$

Are A,B,C and D bounded below? bounded above?, do they admit Inf, Min? Sup, Max?.

Exercise 7:

Determine the minimum, maximum, Supermum and infimum if they exist while justifying the answers of the following sets :

$$A = \{\frac{n-2}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\}, \quad B = \{x^2+1; x \in]1, 2]\}$$

Version Français

Série 1: Corps des nombres réels

Exercice 1:

a). Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$

b). Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$

Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ (irrationnel).

c) Montrer que

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow -a \leq -b$ et $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Exercice 2:

$E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

1) Déterminer $E(x)$ pour $x = 0.79,\ 1.08;\ \frac{11}{3}\ ; e\ ,\ \frac{-574}{100}$

2) Montrer que ces propriétés sont vraies :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Z}, & E(x) + E(-x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, & E(x) + E(-x) = -1. \end{cases}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$: $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.

Exercice 3:

Soient x et y deux réels quelconques.

1) Montrer en utilisant l'inégalité triangulaire que :

$2|x| \leq |x+y| + |x-y|$ et déduire que $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

2) Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$; $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

3) Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$

Exercice 4:

Écrivez les ensembles suivants sous la forme d'un interval de $\mathbb{R}$ ou d'une union d'intervals.

1. $A1 = \{x \in R, 2x^2 \leq 1\}$.
2. $A2 = \{x \in R, x^3 \leq 1\}$.
3. $A3 = \left\{ x \in R, -1 \leq \dfrac{2x}{x^2+1} < 1 \right\}$
4. $A4 = \{x \in R, \dfrac{2}{|x-1|} > 1\}$.

Exercice 5:

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; x \in A\}$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.
2. En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et

que $\inf(B) = -\sup(A)$

Exercice 6:

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+1| \leq 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}, e^x < \frac{1}{2}\}$,
$C = .\{E(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$; $D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$.

A, B, C et D sont-ils majorés? minorés?, admet ils un Inf, un Min? un Sup, un Max?.

Exercice 7:

Déterminer le minimum, le maximum, la borne supérieure et la borne inférieure,si elles existent tout en justifiant les réponses, des ensembles suivantes :

$$A = \{\frac{n-2}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\}, \quad B = \{x^2+1; x \in]1,2]\}$$