I.1. Movement characteristics مميزات الحركة

I.1.1. Position vecteur شعاع الموضع

In the cartesian coordinate system $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, the position vector

في نظام الإحداثيات الديكارتية $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، شعاع الموضع

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

I.1.2. Velocity vector شعاع السرعة

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

There are two velocity vectors: لشعاع السرعة نوعين

I.1.2.1. Average velocity vector شعاع السرعة المتوسطة

$$\overrightarrow{v_m}=\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \qquad (\Delta t=t'-t)$$

I.1.2.2. Instantaneous velocity vector شعاع السرعة اللحظية

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{v_m}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

I.1.3. Accélération vector شعاع التسارع

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

We distinguish two accelerations:

I.1.3.1. Average acceleration vector شعاع التسارع المتوسطي

$$\vec{a}_m=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{v'}-\vec{v}}{t'-t}$$

I.1.3.2. Instantaneous acceleration vector شعاع التسارع اللحظي

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{a_m}=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{v}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

I.2. Coordinates system نظام الاحداثات

I.2.1. Cartesian coordinates الاحداثيات الكارتيزية (الديكارتية)

Let $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ be a direct orthonormal frame of origin and basis $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نفرض معلم متعامد متجانس $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ الذي مبدؤه O و قاعدته $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

I.2.1.1. Position vector: شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

I.2.1.2. Velocity vector: شعاع السرعة

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{cases} v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}\\ v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}\\ v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}\end{cases}}$$

I.2.1.3. Accélération vector:شعاع التسارع

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}} \quad , \quad \boxed{a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}} \quad , \quad \boxed{a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}}$$

I.2.2. Polar coordinates الاحداثيات القطبية

The data (r, θ) called polar coordinates. The basis of the polar coordinate system is formed by two unit vectors $\overrightarrow{u_r}$ *and* $\overrightarrow{u_\theta}$

المتغيرات (r, θ) تسمى الإحداثيات القطبية.

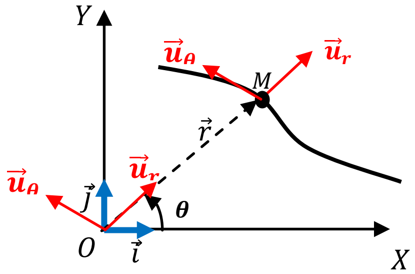
تتكون القاعدة في نظام الإحداثيات القطبية من شعاعي الوحدة $\overrightarrow{u_\theta}$ و $\overrightarrow{u_r}$

$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$

Polar coordinates are linked to Cartesian coordinates by:

تكتب الاحداثات القطبية بدلالة الاحداثيات الكارتيزية كما يلي:

$$\begin{cases} x = r.cos\theta \\ y = r.sin\theta \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



I.2.2.1. Position vector:شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = r.\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{u_r} = cos\theta.\vec{i} + sin\theta.\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = r.(cos\theta.\vec{i} + sin\theta.\vec{j})}$$

I.2.2.2. Velocity vector: شعاع السرعة

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(r.\overrightarrow{u_r}) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta.\vec{i} + cos\theta.\vec{j}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

$\dot{\theta}\,(t) = \omega(t) = \ angular\ velocuty$ السرعة الزاوية

I.2.2.3. Acceleration vector: شعاع التسارع

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta})$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r}$$

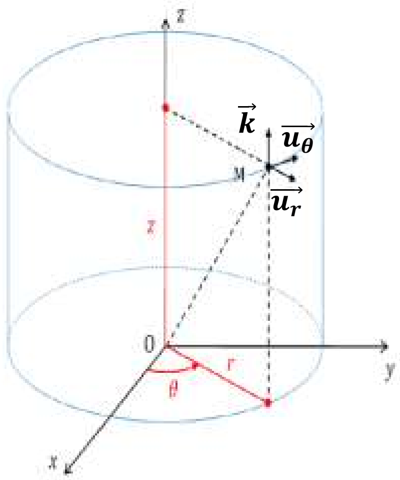
$$\boldsymbol{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}}$$

I.2.3.Cylindrical coordinates الاحداثات الاسطوانية

In the cylindrical coordinate system, a point M in space is represented by coordinates (r, θ, z), and the unit vectors $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})$

في نظام الاحداثيات الاسطوانية، النقطة M في الفضاء تعرف بالاحداثيات (r, θ, z) و أشعة الوحدة $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})$

I.2.3.1. Position Vector: شعاع الموضع



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = r.\vec{u_r} + z\,\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = r.cos\theta \\ y = r.sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tan\theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

I.2.3.2. Velocity vector شعاع السرعة

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r.\vec{u_r} + z\vec{k}\right) = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

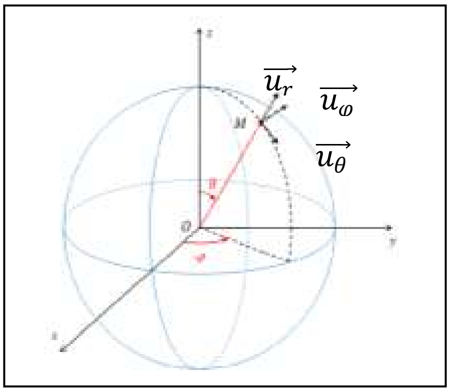
$$= \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

I.2.3.3. Acceleration vector شعاع التسارع

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\boldsymbol{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{k}}$$

I.2.4. Spherical coordinates الاحداثيات الكروية



A point M is represented in the spherical coordinate system, by the coordinates (r, θ, φ),where the unitary vectors ($\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi}$) constituting the basis:

تعرف النقطة M في نظام الإحداثيات الكروية، بالإحداثيات (r, θ, φ)، حيث تشكل أشعة الوحدة ($\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi}$)، الأساس:

I.2.4.1. Position Vector شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u_r}$$

$$\begin{cases} \vec{u_r} = \sin\theta\, cos\varphi.\vec{\imath} + sin\theta.\sin\varphi\,.\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u_\theta} = \frac{d\vec{u_r}}{d\theta} = \cos\varphi\, cos\theta.\vec{\imath} + \sin\varphi\, cos\theta.\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u_\varphi} = \vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta} \;= -\,sin\varphi.\vec{\imath} + cos\varphi.\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} \Rightarrow \begin{cases} x = rsin\theta.cos\varphi \\ y = rsin\theta.sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

I.2.4.2. Velocity vector شعاع السرعة

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r.\vec{u_r}) = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\vec{u_r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$$

I.2.4.3. Acceleration vector شعاع التسارع

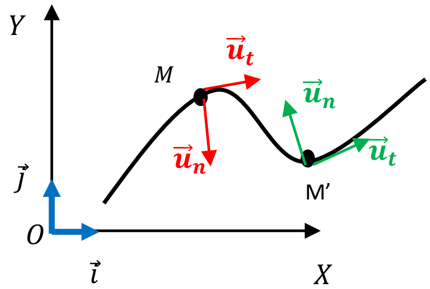
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}\right)$$

$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$

$\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r}\wedge\overrightarrow{u_\theta} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta})$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\varphi)\overrightarrow{u_\theta} + (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\overrightarrow{u_\varphi}$

I.2.5. Frenet frame (Intrinsic basis) معلم فرينات أو القاعدة الذاتية



Frenet frame is a reference frame that moves with the mobile M. Its characteristics are:

- Its origin is a point M
- Unit vector $\overrightarrow{u_t}$ is tangent to the trajectory in *M*
- Unit vector $\overrightarrow{u_n}$ is normal to the trajectory in M

معلم فرينات هو إطار مرجعي يتحرك مع المتحرك M. و خصائصه هي:

- مبدؤه النقطة M
- شعاع الوحدة ($\overrightarrow{u_t}$) مماسي للمسار في M و يتجه مع اتجاه الحركة.
- شعاع الوحدة ($\overrightarrow{u_n}$) عمودي على المسار في M وموجه نحو مركز الانحناء

I.2.5.1. Curvilinear abscissa الفاصلة المنحنية

The curvilinear abscissa *s* at time t of point *M* is the algebraic value of the arc *(MM')*

الفاصلة المنحنية s في اللحظة t للنقطة M هي القيمة الجبرية للقوس (MM')

$s(t) = \widehat{MM'}$

So $d\overrightarrow{OM} = ds\,\overrightarrow{u_t}$

I.2.5.2. Velocity vector in the Frenet reference frame: شعاع السرعة في معلم فرينات أو المعلم الذاتي

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_t} = v\,\overrightarrow{u_t} = \binom{v}{0}$ $\quad\quad \vec{v} = v\,\overrightarrow{u_t}$

$v = \frac{ds}{dt}$

I.2.5.3. Acceleration vector in the Frenet reference frame: شعاع التسارع في معلم فرينات أو المعلم الذاتي

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\overrightarrow{u_t}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$

$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\theta} = \overrightarrow{u_n}$

ds = Rd θ $\Rightarrow$ $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$

$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{v}{R}\overrightarrow{u_n}$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$

Tangential acceleration التسارع المماسي $\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t}$

Normal acceleration التسارع الناظمي $\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$

$\vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n}$ et $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2}$