

# Chapitre 1. Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

## I.1 Introduction

Le rôle du contrôleur est de délivrer un signal de commande  $u(t)$  qui « oblige » le système à accomplir deux tâches essentielles : d'abord, il doit stabiliser le système en boucle fermée s'il n'était pas stable en boucle ouverte, et ensuite, il doit amener la sortie du système à correspondre à la consigne (la valeur désirée). Il existe différents types de contrôleurs et diverses méthodes pour les concevoir. Dans la suite, nous allons considérer la boucle de commande classique représentée par la figure suivante :

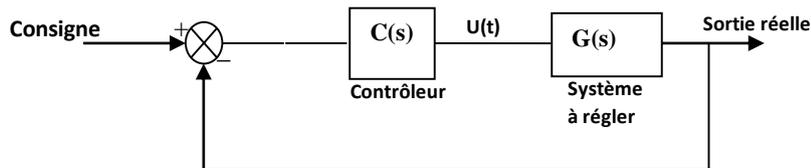


Fig 1.1 Boucle de commande classique

## I.2 Spécifications dans le domaine fréquentiel

La synthèse de contrôleurs dans le domaine fréquentiel exige de connaître les spécifications fréquentielles du système à régler afin de déterminer ses performances. La figure suivante montre une réponse fréquentielle typique d'un système asservi « le lieu de Bode ».

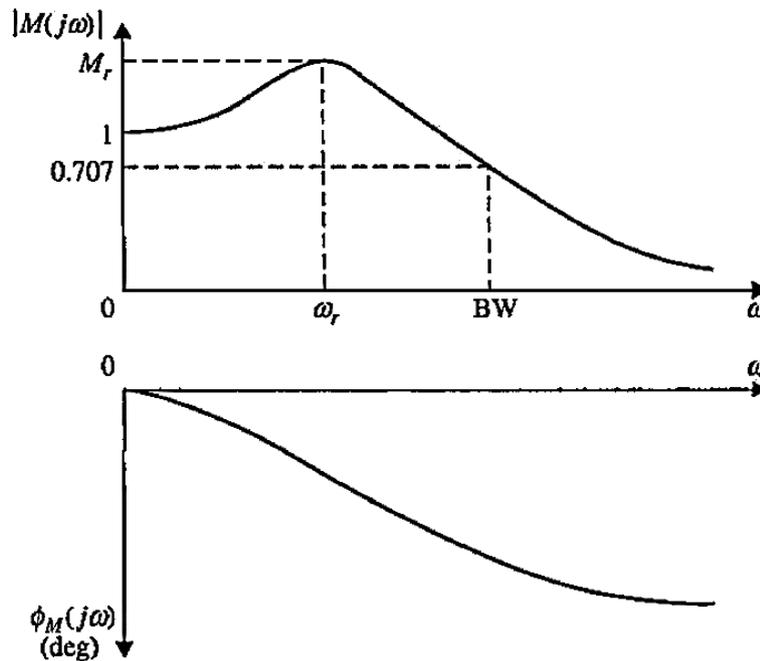


Fig 1.2 Lieu de Bode typique d'un système asservi

On peut distinguer les spécifications suivantes :

### a- Le pique de résonance $M_r$

C'est la valeur maximale du module de la fonction de transfert du système asservi en boucle fermée  $|M(j\omega)|$ , cette valeur nous donne une indication sur la stabilité relative du système, plus

elle est grande plus le dépassement (dans la réponse indicielle) est grand, en générale cette valeur doit être comprise entre 1.1 et 1.5

**b- La fréquence de résonance  $\omega_r$**

C'est la fréquence correspondante au pique de résonance  $M_r$ .

**c- La bande passante BW**

C'est la fréquence à laquelle  $|M(j\omega)| = 0.707$  ( $\sim 3$  db), elle nous donne une indication sur la réponse transitoire du système, plus elle est grande plus le temps de montée de la réponse indicielle du système est petit, ceci car les hautes fréquences passent. Si cette fréquence est petite, seules les basses fréquences passent et la réponse du système devient lente. La bande passante indique aussi le degré de robustesse du système, c'est-à-dire sa capacité à rester stable faces aux variations paramétriques.

**I.3 Spécifications fréquentielles d'un système du deuxième ordre**

On rappelle que la forme générale de la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre est la suivante :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2} \tag{1.1}$$

$\zeta$  facteur d'amortissement,  $\omega_n$  pulsation propre non amortie.

Les spécifications fréquentielles d'un système du deuxième ordre sont données par le tableau suivant :

<b>Bande passante</b>	$BW = \omega_n \left[ (1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2}$
<b>Pulsation de résonance</b>	$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
<b>Pulsation de coupure</b>	$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$
<b>Facteur de résonance</b>	$m = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$
<b>Facteur de qualité</b>	$Q = \frac{1}{2\zeta}$
<b>En décibels</b>	$M_{dB} = 20 \log m$
	$Q_{dB} = 20 \log Q$
<b>On a aussi</b>	$Q = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\pi}{f_{pic} \omega_n} \right)^2}}$

#### I.4 Le contrôleur PID

C'est le contrôleur le plus largement employé dans l'industrie, en raison de sa simplicité et la facilité de son réglage. Il est composé de trois actions : Proportionnelle, Intégrale et Dérivée. Par ailleurs, il existe d'autres contrôleurs qui combinent plus ou moins une de ces actions, tels que :

##### I.4.1 Le contrôleur à action proportionnelle :

Ce contrôleur agit comme un amplificateur, sa sortie est directement proportionnelle à l'erreur d'entrée, son schéma fonctionnel est le suivant :

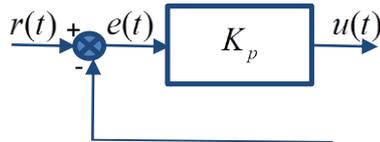


Fig 1.3 Schéma fonctionnel du contrôleur Proportionnel

Sa loi de commande est donnée par :

$$u(t) = K_p e(t) \quad (1.2)$$

$K_p$  gain proportionnel

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (1.3)$$

Le tracé de Bode de ce contrôleur (pour  $K_p = 1$ ) est représenté par la figure suivante :

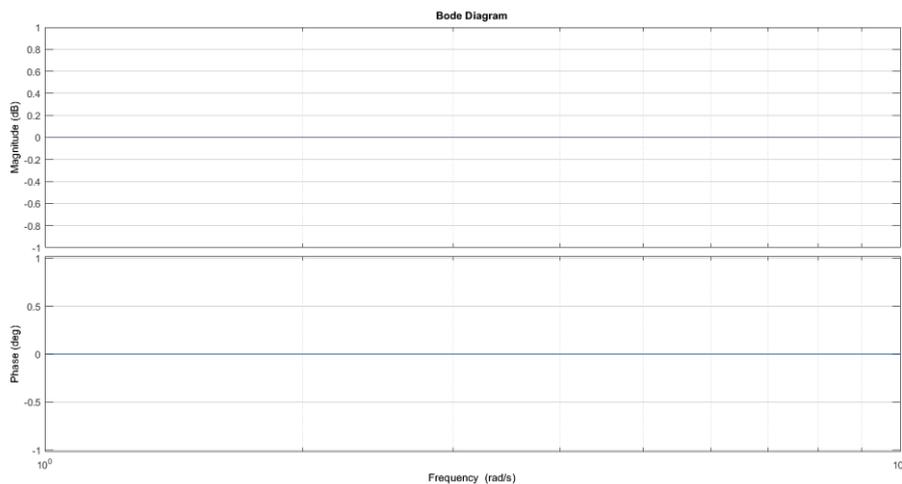


Fig 1.4 Lieu de Bode du correcteur Proportionnel

Sa tâche consiste à ajuster le gain statique initial du système :

- Si  $K_p < 1$ , il agit comme un atténuateur, cela renforce la stabilité du système et réduit le dépassement en boucle fermée. En revanche, cela a un effet négatif sur la vitesse et la précision.
- Si  $K_p > 1$ , il agit comme un amplificateur, ce qui augmente la vitesse et la précision en boucle fermée, en revanche, il augmente le dépassement et dégrade la stabilité du système.

#### I.4.2 Contrôleur a actions proportionnelle et intégrale

En plus de l'action proportionnelle, il ajoute un pôle nul (intégrateur) à la boucle de commande, son schéma fonctionnel est le suivant :

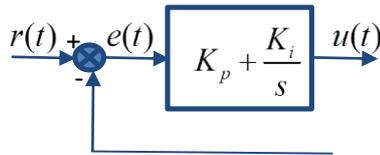


Fig 1.5 Schéma fonctionnel du contrôleur proportionnel intégral

Sa loi de commande est donnée par :

$$u(t) = K_p + K_i \int_0^t e(t) dt \quad (1.4)$$

$K_i$  gain de l'action intégrale.

Sa fonction de transfert est la suivante :

$$C_{pi}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (1.5)$$

Le lieu de Bode de ce contrôleur (pour  $K_p = K_i = 1$ ) est représenté par la figure suivante :

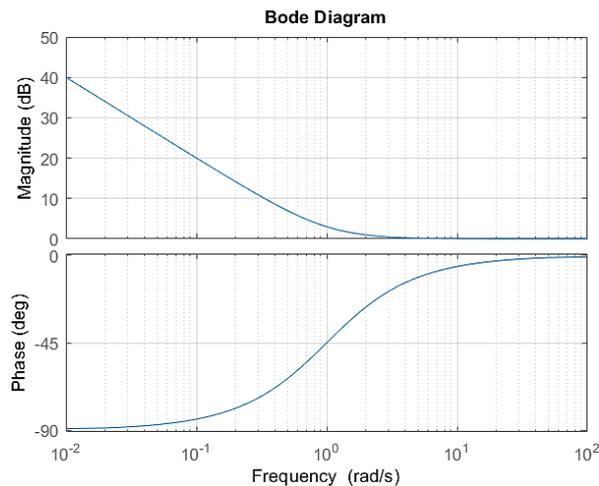


Fig 1.6 Lieu de Bode du contrôleur Proportionnel Intégral

Les principales caractéristiques fréquentielles d'un contrôleur PI :

- **Gain en basse fréquence** : À basses fréquences, le gain du contrôleur PI est élevé. Cela signifie que le contrôleur PI amplifie les signaux à basses fréquences, ce qui le rend efficace pour corriger les erreurs de régulation à long terme, telles que les erreurs de régulation stationnaire.
- **Pente de -20 dB/décade en amplitude** : Le contrôleur PI a une pente de -20 dB/décade en amplitude dans la région de fréquence basse. Cela signifie que l'amplitude de la réponse diminue de 20 dB à chaque décade d'augmentation de fréquence. Cette pente indique que le contrôleur PI apporte une correction intégrale, ce qui est bénéfique pour éliminer les erreurs de régulation stationnaire. Il y a aussi une fréquence de coupure en intégration qui dépend de  $K_p$  et  $K_i$ , au-delà de laquelle le gain intégral commence à décroître.
- **Déphasage de -90 degrés** : Dans la région de fréquence basse, le contrôleur PI introduit un déphasage de -90 degrés (phase en retard) entre l'entrée et la sortie. Cela indique que le contrôleur PI réagit de manière réactive aux erreurs de régulation à long terme.
- **Stabilité** : Le contrôleur PI est généralement stable, ce qui signifie qu'il n'amplifie pas les hautes fréquences de manière significative. Cependant, il est important de régler correctement les paramètres  $K_p$  et  $K_i$  pour éviter des réponses instables ou oscillantes.

Les principaux effets de ce contrôleur sur la boucle de commande sont les suivants :

- ✓ Elimination de l'erreur statique
- ✓ Augmentation du gain global du système aux basses fréquences.
- ✓ Augmentation de la rapidité du système

### Devoir :

Montrer que l'ajout d'un intégrateur pur dans une boucle de commande fermée a pour effet l'élimination de l'erreur statique.

### I.4.3 Contrôleur à actions proportionnelle et dérivée

Il combine une action proportionnelle avec une action dérivée, son schéma fonctionnel est le suivant :

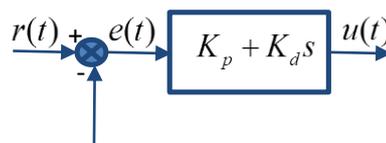


Fig 1.7 Schéma fonctionnel du contrôleur proportionnel dérivé

$K_d$  gain dérivée

Sa loi de commande est donnée par :

$$u(t) = K_p + K_p \frac{de(t)}{dt} \quad (1.6)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C_{PD}(s) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p + K_d s \quad (1.7)$$

Comme on peut le remarquer, cette fonction de transfert est non causale (degré du numérateur > degré du dénominateur), d'où l'utilisation d'un filtre

Le lieu de Bode de ce contrôleur (pour  $K_p=2$  et  $K_d=1$ ) est donnée par :

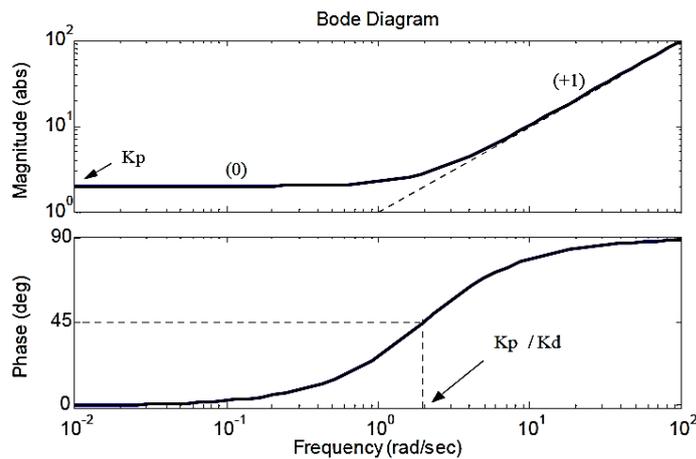


Fig 1.8 Lieu de Bode du correcteur Proportionnel Dérivée

Afin de comprendre le principal effet de l'action dérivée, observant la figure suivante :

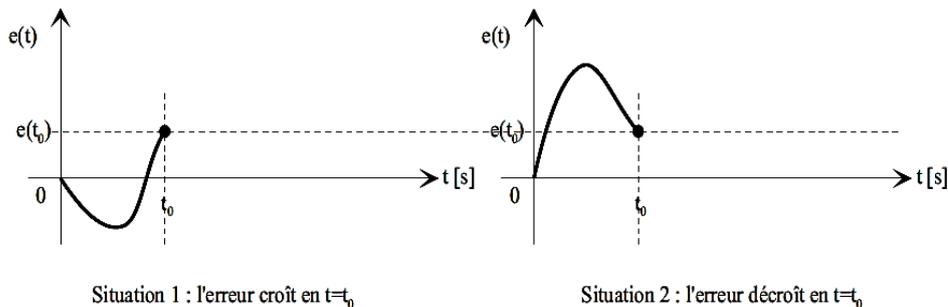


Fig 1.9 Deux situations identiques d'une réponse temporelle d'un système

A l'instant  $t=t_0$ , l'amplitude de l'erreur des deux situations est la même, mais dans la première la réponse croît, tandis que dans la deuxième situation elle décroît, se pose alors la problématique suivante : comment le contrôleur peut-il savoir que la réponse croît ou décroît pour qu'il prend les mesures nécessaires ?

La dérivée de la réponse  $e(t)$  par rapport au temps à l'instant  $t_0$  permet de savoir si la réponse croît ou décroît, d'où l'utilité de l'action dérivée. Cette dernière possède d'autres effets, à savoir :

- ✓ Augmentation de l'amortissement et réduction du dépassement.
- ✓ Augmentation de la rapidité de la réponse temporelle (réduction du temps de montée).

- ✓ Augmentation de la bande passante.
- ✓ Amélioration des marges de phase et de la marge de gain.

Son principal effet négatif peut être observé sur son lieu de Bode :

- ✓ Accentuation des bruits aux hautes fréquences.

#### I.4.4 Contrôleur à action proportionnelle intégrale et dérivée :

Son schéma fonctionnel est le suivant :

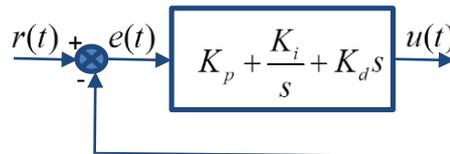


Fig 1.10 Schéma fonctionnel du contrôleur proportionnel intégral dérivé

Il combine les trois actions : proportionnelle, intégrale et dérivée, sa loi de commande est donnée par :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1.8)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C_{PD}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (1.9)$$

Le contrôleur PID bénéficie des avantages de chaque action qui le compose (rapidité pour les actions proportionnelle et le dérivée, annulation de l'erreur statique pour l'action intégrale ...etc.). Il existe plusieurs méthodes d'ajustement des trois paramètres du contrôleur PID, notamment les méthodes basées sur les réponses temporelles comme la méthode de Ziegler-Nichols...etc. Dans ce qui suit, nous allons étudier les méthodes d'ajustement fréquentielle.

#### I.4.5 Correcteur à retard de phase

Le correcteur à retard de phase, a pour principal rôle d'augmenter le gain dans les basses fréquences. Il est donc utilisé afin d'accroître la précision d'un système asservi. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = \frac{a(1+T.s)}{(1+aT.s)} \quad (1.10)$$

avec  $a > 1$  .

On remarque qu'il a deux pulsations de coupure  $\frac{1}{T} > \frac{1}{aT}$  .

En effet, en réglant le paramètre  $T$  sur une valeur suffisamment faible, l'action de correction ainsi que le déphasage négatif (retard de phase) introduit par le correcteur ne seront effectives qu'aux basses fréquences, il n'y aura donc pas d'influence sur la marge de stabilité, car les pulsations de coupure à 0 dB ( $\omega_{co}$ ) sont généralement situées aux fréquences plus élevées.

Pour régler le correcteur à retard de phase, on choisira la valeur de  $a$  qui permettra d'obtenir le gain statique résultant voulu, et on choisira ensuite  $T$  tel que  $\frac{1}{T} \ll \omega_{co}$ .

#### I.4.6 Correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase, a pour principal rôle d'augmenter la marge de phase d'un système. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = \frac{1 + aT \cdot s}{1 + T \cdot s} \quad (1.11)$$

avec  $a > 1$ .

On remarque qu'il a deux pulsations de coupure  $\frac{1}{T} > \frac{1}{aT}$ .

A la pulsation  $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ , le déphasage est maximale  $\varphi_{max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$ . L'action

corrective consistera alors à faire coïncider  $\omega_{max}$  avec la pulsation de coupure à 0 dB  $\omega_{co}$  du système à corriger et à régler  $\varphi_{max}$  de manière à obtenir la marge de phase voulue (remontée de phase).

### I.5 Méthodes d'ajustement fréquentielle

Les méthodes fréquentielles sont basées sur les réponses en fréquence, elles consistent à ajuster les paramètres du contrôleur PID en respectant un cahier des charges intégrant des critères fréquentiels tels que les marges de gain, de phase, la bande passante, et d'autres spécifications similaires.

#### I.5.1 Méthode de réglage de Bode

Elle repose sur l'analyse des réponses en fréquence du système de contrôle et permet d'ajuster de manière précise les paramètres du PID pour atteindre les performances désirées. Elle consiste à éliminer d'abord la plus grande constante de temps du système en boucle ouverte (pôle dominant), pour ensuite ajuster le gain proportionnel  $K_p$  selon des marges de gain  $A_m$  et de phase  $\varphi_m$  désirées.

Soit la forme générale d'une fonction de transfert d'un système :

$$G(s) = \frac{K_a \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots \dots \dots}{s^\alpha \cdot (1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots \dots \dots}$$

#### a) Pour un contrôleur PI

Prenons la fonction de transfert d'un contrôleur PI :  $C_{pi}(s) = K_p \cdot \frac{(1+T_i \cdot s)}{T_i \cdot s}$  (il s'agit d'une autre forme du contrôleur PI), la fonction de transfert en boucle ouverte du système avec le contrôleur sera donc :

$$G_{Bo}(s) = C_i(s) \cdot G(s) = K_p \cdot \frac{(1 + T_i \cdot s)}{T_i \cdot s} \cdot \frac{K_a \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

avec :  $K_o = \frac{K_p \cdot K_a}{T_i}$ .

Pour éliminer la plus grande constante de temps du système  $\tau_{max}$  (pôle dominant), on met  $T_i = \tau_{max}$ . La fonction de transfert en boucle ouverte deviendra alors :

$$G_{Bo}(s) = \frac{(1 + \tau_{max} \cdot s)}{s} \cdot \frac{K_o \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

### b) Pour un contrôleur PD

Sois la fonction de transfert d'un contrôleur PD :  $C_{pd}(s) = K_p \cdot (1 + T_d \cdot s)$  (il s'agit d'une autre forme du contrôleur PD), la fonction de transfert en boucle ouverte du système avec le contrôleur sera donc :

$$G_{Bo}(s) = C_d(s) \cdot G(s) = K_p \cdot (1 + T_d \cdot s) \cdot \frac{K_a \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

avec :  $K_o = K_p \cdot K_a$

Pour éliminer la plus grande constante de temps du système  $\tau_{max}$  (pôle dominant), on met  $T_d = \tau_{max}$ . La fonction de transfert en boucle ouverte deviendra alors :

$$G_{Bo}(s) = (1 + \tau_{max1} \cdot s) \cdot \frac{K_o \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

### c) Pour un contrôleur PID

Sois la fonction de transfert d'un contrôleur PID :  $C_{pid}(s) = K_p \cdot \frac{(1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2)}{T_i \cdot s}$ . Il s'agit d'une autre forme du contrôleur PID, la fonction de transfert du système en boucle ouverte sera donc :

$$G_{Bo}(s) = C_{pid}(s) \cdot G(s) = K_p \cdot \frac{(1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2)}{T_i \cdot s} \cdot \frac{K_a \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

Avec :  $K_o = \frac{K_p \cdot K_a}{T_i}$

La méthode consiste à d'abord éliminer les deux plus grandes constantes de temps du système  $\tau_{max1}$  et  $\tau_{max2}$  (pôles dominants) en mettant :

$$(1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2) = (1 + \tau_{max1} \cdot s) \cdot (1 + \tau_{max2} \cdot s)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte deviendra alors :

$$G_{Bo}(s) = \frac{(1 + \tau_{max1} \cdot s) \cdot (1 + \tau_{max2} \cdot s)}{s} \cdot \frac{K_o \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

### Deuxième étape : Réglage du gain $K_p$

Soit  $G_{bo}(s)$  une fonction de transfert d'un système corrigée par un contrôleur en boucle ouverte :

$$G_{bo}(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_o}{s^\alpha} \cdot \frac{(1 + T_1 \cdot s) \cdot (1 + T_2 \cdot s) + \dots}{(1 + \tau_1 \cdot s) \cdot (1 + \tau_2 \cdot s) + \dots}$$

Il s'agit alors de :

- 1) Tracer le diagramme de Bode de  $G(s)$  pour  $K_o = 1$ .
- 2) Relever la pulsation  $\omega_{co}$ , c'est-à-dire :  $\arg\{G(j\omega_{co})\} = -180^\circ + \varphi_m$ , où  $\varphi_m$  est la marge de phase désirée (en générale  $45^\circ$ ).
- 3) Relever le gain de boucle  $|G(j\omega_{co})|$  en cette pulsation.
- 4) Calculer le gain  $K_o$  à appliquer à  $G(p)$  pour que :  $K_o \cdot |G(j\omega_{co})| = 1$  db, c'est-à-dire :  $K_o = \frac{1}{|G(j\omega_{co})|}$ .
- 5) En déduire la valeur de  $K_p$

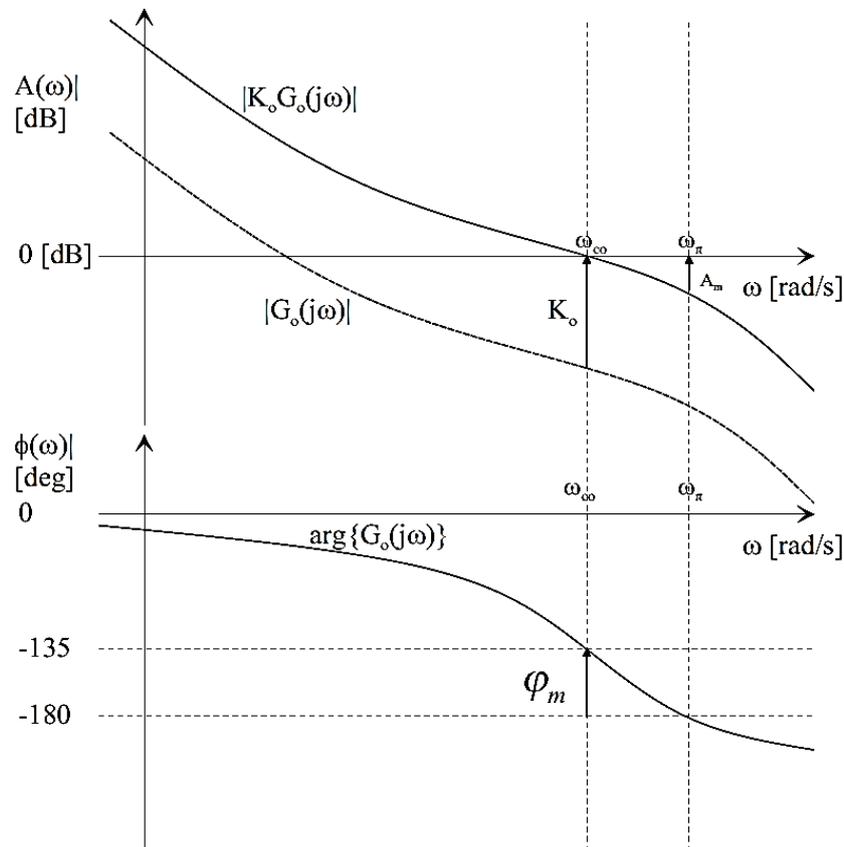


Fig 1.11 Illustration de la méthode de Bode

### Exemple :

Sois la fonction de transfert d'un système :

$$G(s) = \frac{100}{(1 + 0.01 \cdot s) \cdot (1 + 0.001 \cdot s) \cdot (1 + 0.0001 \cdot s)}$$

On veut commander ce système par un contrôleur PID de fonction de transfert :

$$C_{pid}(s) = K_p \cdot \frac{(1+T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2)}{T_i \cdot s}$$

1-  $T_i$  et  $T_d$  sont trouvés en résolvant l'équation :

$$(1 + T_i \cdot s + T_i \cdot T_d \cdot s^2) = (1 + \tau_{max1} \cdot s) \cdot (1 + \tau_{max2} \cdot s) = (1 + 0.01 \cdot s) \cdot (1 + 0.001 \cdot s) = (1 + 0.011 \cdot s + 0.00001 \cdot s^2)$$

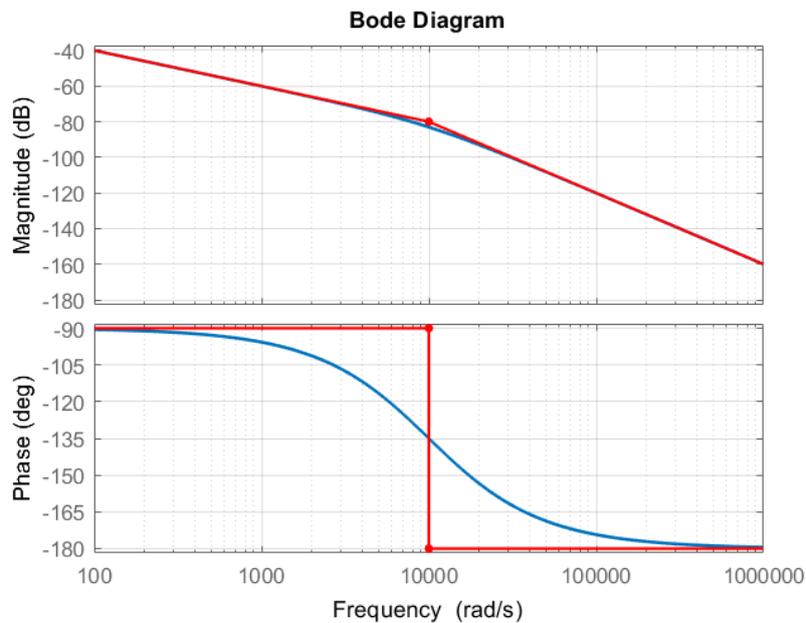
D'où :  $T_i = 0.011$  et  $T_i \cdot T_d = 0.00001 \rightarrow T_d = 0.00091$ .

2- Réglage de  $K_p$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$G_{bo}(s) = C_{pid}(s) \cdot G(s) = \frac{K_o}{s} \cdot \frac{1}{(1+0.0001s)}, \text{ avec : } K_o = \frac{K_p \cdot K_a}{T_i} = \frac{K_p \cdot 100}{0.011}$$

Le diagramme asymptotique de Bode de  $G_{bo}(s)$  (pour  $K_o = 1$ ) est représenté par la figure suivante:



On remarque que si on veut avoir une marge de phase de  $45^\circ$ , alors :

$$\arg\{G(j\omega_{co})\} = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$$

D'après le tracé  $\omega_{co} = 0.0001$  rad/sec. Et le gain pour cette pulsation est égale à -80 db, donc :

$$K_o = \frac{1}{|G(j\omega_{co})|}. \text{ On a alors : } 20 \cdot \log(|G(j\omega_{co})|) = 80, \text{ donc } |G(j\omega_{co})| = 10^4.$$

$$\text{Enfin on a } K_o = \frac{K_p \cdot 100}{0.011}, \text{ donc : } K_p = \frac{K_o \cdot 0.011}{100} = \frac{10^4 \cdot 0.011}{100} = 1.1$$