Badji Mokhtar – Annaba University
Faculty of Technology
Department of Informatics

2023/2024
Dr. Neggal bilel

Series of Exercises 02
Sets, Functions and Binary Relation

Exercice 1 *Let the following sets :* $A =]-\infty, 3]\,, B = [-2, 8]\,, C =]-5, +\infty[,\ D = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| \leq 5\}$

1. *What are the equality or inclusion relationships that exist between these sets ?*
2. *Find the complement in the following cases :* $C_{\mathbb{R}}A, C_{\mathbb{R}}B, C_{\mathbb{R}}C, C_{C}B$.
3. *Find* $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A/C, (\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B)$*, and* $A \triangle B$.

Exercice 2 *Let the set* E *and* A, B, C *are three parts of* E

a. Show that :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
3. $A/(B \cap C) = (A/B) \cup (A/C)$ *(homework)*

b. Simplify

1. $C_E(A \cup B) \cap C_E\,(C \cup C_E A)$
2. $C_E(A \cap B) \cup C_E\,(C \cap C_E A)$.

Exercice 3 *Let the functions* $f : [0,1] \to [0,2]$ *with* $f(x) = 2 - x$ *and* $g : [-1,1] \to [0,2]$ *with* $g(x) = x^2 + 1$

1. *Find* $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1,1]), g^{-1}[0,2])$
2. *Is the function* f *bijective ? Justify*
3. *Is the function* g *bijective ? Justify*
4. *Can we calculate* $g \circ f$ *and* $f \circ g$ *Justify.*

Exercice 4 ***I.*** *Let the function* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *defined by :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. *Find the following sets :* $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1,2])$
2. f *is one-to-one (injective) function ?* f *is onto (surjective) function ?*

II. *Let the function* $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *defined by :*

$$g(x) = \frac{9}{2x-1}$$

Show that g *is a bijection. Find the inverse function.*

Exercice 5 *Let* f *be a function from* E *to* F*. Let* A *and* A' *be two subsets of* E*, and let* B *and* B' *be two subsets of* F

1. *Show that*

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$	$2 - f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B($ *homework* $)$
S- $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)($ *devoir* $)$	$4 - f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$
$5 - f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}\left(B'\right)$	$6 - f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$ *(homework)*

2. *Show that if* f *is injective, then we have equality in (4).*

Exercice 6 *We define the relation* $\Re$ *on* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\Re\left(x',y'\right) \Leftrightarrow x+y = x'+y'$$

1. *Show that* $\Re$ *is an equivalence relation.*
2. *Find the equivalence class of the pair* $(0,0)$.

Exercice 7 *We define the relation* T *in* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\forall (x,y); (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)T(x',y') \Leftrightarrow |x-x'| \leq y'-y$$

1. *Show that* T *is a order relation.*
2. *Is the order total or partial ?*

Exercice 8 *We define the following relation* S *on* $\mathbb{N}^*$ *:*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : nSm \Leftrightarrow \quad \textit{there exists} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \textit{such that :} \quad n = \mathrm{km}$$

1. *Verify that* $6S2$ *and* $5S1$.
2. *Show that the relation* S *is a partial order relation on* $\mathbb{N}^*$.
3. *In the following exercise, we assume that the set* $\mathbb{N}^*$ *is ordered by the relation* S. *Does* $\mathbb{N}^*$ *have a maximum ? A minimum ?*

Série de TD 02
Ensembles et Applications

exercice 1 *On considère les ensembles suivants :* $A =]-\infty, 3]\,, B = [-2, 8]\,, C =]-5, +\infty[$, $D = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| \leq 5\}$

1. *Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?*
2. *Déterminer le complémentaire dans les cas suivantes :* $C_{\mathbb{R}}A, C_{\mathbb{R}}B, C_{\mathbb{R}}C, C_C B$ *dana* F.
3. *Déterminer* $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A/C, (\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B)$, *et* $A \triangle B$.

exercice 2 *Soit* E *un ensemble,* A, B *et* C *trois parties de* E
a. Montrer que :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
3. $A/(B \cap C) = (A/B) \cup (A/C)$ *(devoir)*

b. Simplifier

1. $C_E(A \cup B) \cap C_E\,(C \cup C_E A)$
2. $C_E(A \cap B) \cup C_E\,(C \cap C_E A)$.

exercice 3 *Soient les applications* $f : [0,1] \to [0,2]$ *avec* $f(x) = 2 - x$ *et* $g : [-1,1] \to [0,2]$ *avec* $g(x) = x^2 + 1$

1. *Déterminer* $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1,1]), g^{-1}[0,2])$
2. *L'application* f *est-elle bijective ? justifier*
3. *L'application* g *est-elle bijective ? justifier*
4. *Est ce que, on peut calculer* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *justifier.*

exercice 4 ***I.*** *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. *Déterminer les ensembles suivants :* $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1,2])$
2. f *est-elle injective ?* f *est-elle surjective ?*

II. *Soit l'application* $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *définie par :*

$$g(x) = \frac{9}{2x-1}$$

Montrer que g *est une bijection. Déterminer son application réciproque.*

exercice 5 *Soit* f *une application de* E *vers* F. *Soient* A *et* A' *deux partie de* E *, et soient* B *et* B' *deux partie de* F

1. *Montrer que*

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$	$2 - f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B($ *devoir* $)$
S- $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)($ *devoir* $)$	$4 - f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$
$5 - f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}\left(B'\right)$	$6 - f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$ *(devoir)*

2. *Montrer que si* f *est injective alors on a égalité dans (4).*

exercice 6 *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation* $\Re$ *par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \Re \left(x', y'\right) \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1. *Montrer que* $\Re$ *une relation d'équivalence.*
2. *Trouver la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

exercice 7 *On définit dans* $\mathbb{R}^2$ *la relation* T *par :*

$$\forall (x,y); (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) T (x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

1. *Montrer que* T *est une relation d'ordre.*
2. *L'ordre est-il total ou partiel ?*

exercice 8 *On définit sur* $\mathbb{N}^*$ *la relation* S *suivante :*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : nSm \Leftrightarrow \quad \textit{il existe un} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \textit{tel que :} \quad n = \mathrm{km}$$

1. *Vérifier que* $6S2$ *et* $5S1$.
2. *Montrer que la relation* S *est une relation d'ordre partiel sur* $\mathbb{N}^*$.
3. *On suppose dans la suite de l'exercice que l'ensemble* $\mathbb{N}^*$ *est ordonné par la relation* S. $\mathbb{N}^*$ *possédé-t'il un maximum ? un minimum ?*