CHAPITRE II   REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES

II.1 Introduction

Il existe plusieurs formes de représentation mathématique des systèmes : les fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel, les équations différentielles dans le domaine temporel, et la représentation d'état, également dans le domaine temporel. Cette dernière est une approche essentielle dans l'automatique moderne pour modéliser le comportement dynamique des systèmes, à l'aide d'équations différentielles du premier ordre, décrivant l'évolution des variables d'état au fil du temps. Cette méthode est particulièrement utile pour analyser et concevoir des systèmes complexes tels que les systèmes de contrôle et les circuits électroniques.

II.2 Notion d'état

On définit l'état d'un système à l'instant t_0 comme l'information sur son passé (historique), nécessaire pour connaître son évolution si l'on connaît les signaux d'entrée et les équations du système.

II.3 Variables d'état

C'est l'ensemble des variables qui sont capable de mémoriser les informations sur la dynamique du système. Généralement on les notes : $x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots$

Un processus décrit sous forme de représentation d'état se définit par ses variables d'état, lesquelles incarnent des paramètres énergétiques. Ces variables fournissent une description détaillée de l'évolution interne du système.

II.4 Vecteurs d'état

C'est un ensemble minimal de variables d'état, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution d'un système si on connaît les équations qui décrivent son fonctionnement et ses signaux d'entrées. Généralement on les notes :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Il est important de noter que les vecteurs d'état ne sont pas uniques. En effet ils différent selon le choix des variables d'état.

II.5 Equation d'état

Tout système linéaire, causal et continu peut être représenté par les équations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + B(t)e(t) \qquad \textit{Equation d'état} \\ Y(t) &= C(t)X(t) + D(t)e(t) \qquad \textit{Equation de mesure (ou de sortie)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

- *A, B, C, D* sont appelées matrices d'état du système.
- *X* est appelée vecteur d'état du système.
- *e* est appelée vecteur d'entrée du système.
- *Y* est appelée vecteur de sortie du système.

Remarque

- Si les matrices *A, B, C et D* sont indépendantes du temps (constantes), alors le système est stationnaire.
- Dans le cas d'un système discret, ces équations prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Be(k) \\ Y(k) &= CX(k) + De(k) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Exemple

Afin d'illustrer la représentation d'état, considérant le schéma électrique suivant :

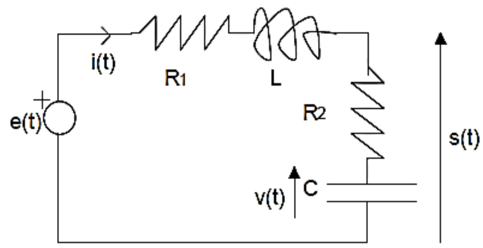

Fig 2.1. Circuit électrique

Ses équations électriques sont données par :

$$\begin{cases} e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + v(t) \\ i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt} \\ s(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{cases}$$

Si on choisit *i*(t) et *v*(t) comme variables d'état, *e(t)* comme entrée et *S(t)* comme sortie, alors on peut écrire :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{-(R_1+R_2)}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$Y = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} X$$

Avec : $X = \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, Y = S(t)$

II.6 Passage de l'équation d'état à la fonction de transfert

Sois les équations d'état et de mesure d'un système :

$\dot{X}(t) = AX(t) + Be(t)$

$Y(t) = CX(t) + De(t)$

Appliquons la transformée de Laplace, on trouve :

$sX(s) = AX(s) + BE(s)$

$Y(s) = CX(s) + DE(s)$

En supposant que les conditions initiales sont nulles, on peut écrire :

$X(s) = X(s)(sI - A) = BE(s) \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} BE(s)$

$Y(s) = CX(s) + DE(s) = C(sI - A)^{-1} BE(s) + DE(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] E(s)$

avec I matrice identité de la même dimension que A

On déduit alors la fonction de transfert du système comme suit :

$$G(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = C(s.I - A)^{-1}.B + D \qquad (2.4)$$

Remarque importante :

Les pôles d'une fonction de transfert sont les valeurs propre de la matrice A

II.7 Formes canoniques des représentations d'état

Sois un système représenté par sa fonction de transfert (avec m < n) :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0} \qquad (2.5)$$

La représentation d'état de ce système n'est pas unique, il existe plusieurs formes canoniques énumérées ci-après.

II.7.1 Forme commandable (compagne pour la commande)

Cette configuration est interprétée comme une série d'intégrateurs purs, dont les sorties représentent les variables d'état du système. Sois la forme générale d'une fonction de transfert d'un système :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s^1+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s^1+a_0}\rightarrow$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0 u(t)$$

La figure suivante illustre le schéma bloc de cette configuration

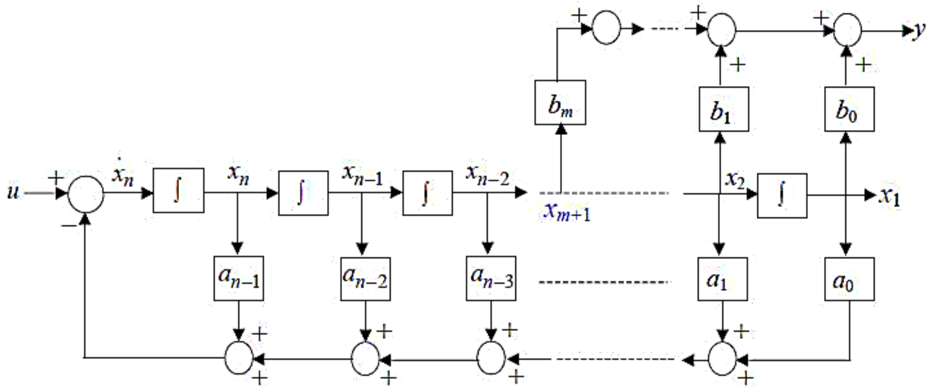

Fig 2.2 Forme compagne de commande

a) Cas d'une excitation simple

Prenons d'abord le cas d'une excitation simple :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s^1+a_0}\rightarrow$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=u(t)\rightarrow$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}=-\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\ldots-a_1\frac{dy(t)}{dt}-a_0 y(t)+u(t)$$

Si on choisit les variables d'état comme suit :

$$x_1(t)=y(t),x_2(t)=\frac{dy(t)}{dt},\ldots,x_n(t)=\frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Alors on peut écrire :

$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\dot{x}_2(t)=x_3(t),\ldots,x_{n-1}(t)=x_n(t)$, et enfin :

$$\dot{x}_n(t)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\ldots-a_{n-1}x_n(t)+u(t)$$

D'où les équations d'état de la forme commandable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{2.6}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Remarques : Dans cette configuration, chaque variable d'état est la dérivée de la précédentes, cela implique que si on modifie la commande *u(t)* toutes les états sont modifié, pour cette raison on parle de système commandable.

Le schéma analogique de cette configuration est illustré par la figure suivante :

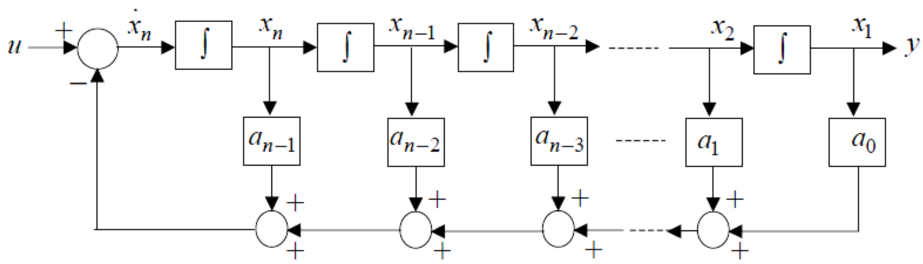

Fig 2.3 Schéma analogique (forme de commandabilité cas excitation simple)

b) Cas d'une excitation multiple

Sois $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0}$, $m < n$ et $b_0 \neq 0$

Introduisons une variable intermédiaire V telle que : $G(s) = \dfrac{Y(s)}{V(s)}\dfrac{V(s)}{U(s)}$, avec :

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0} \quad et \quad \frac{Y(s)}{V(s)} = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0$$

On remarque que $\dfrac{V(s)}{U(s)}$ correspond au cas précédent (excitation simple), donc si on pose :

$$x_1(t) = v(t), x_2(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \ldots, x_n(t) = \frac{d^n v(t)}{dt^n}$$

On aura :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Tandis que :

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0 \rightarrow Y(s) = V(s)(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0) \rightarrow$$

$$y(t) = b_m \frac{dv^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dv^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dv}{dt} + b_0 v = b_m x_{m+1} + b_{m-1}x_{m+1} + \ldots + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

D’où la représentation d’état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Le schéma de simulation dans le cas d’une excitation multiple est représenté par la figure suivante :

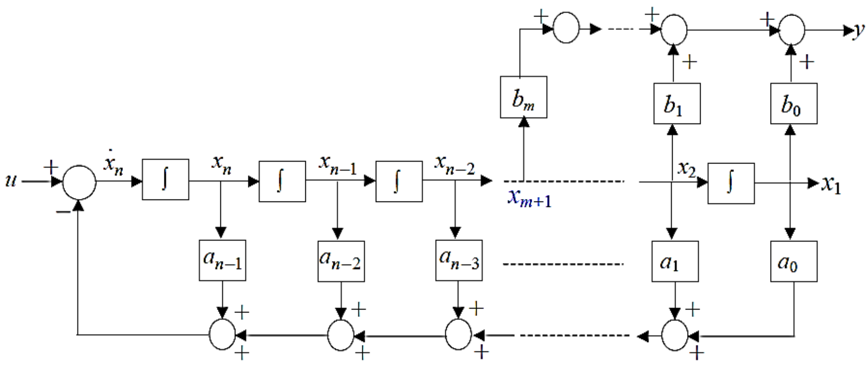

Fig 2.4 Schéma de simulation de la forme commandable « cas excitation multiple »

II.7.2 Forme observable (compagne pour l'observation)

Sois : $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s^1+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s^1+a_0}$, avec : $m<n$. On aura :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+...+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}+...+b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0 u(t)$$

La transformée de Laplace de cette équation donne :

$$s^n Y(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)+...+a_1 sY(s)+a_0 Y(s)=b_m s^m U(s)+b_{m-1}s^{m-1}U(s)+...+b_1 sU(s)+b_0 U(s)\rightarrow$$
$$s^n Y(s)=\left[b_0 U(s)-a_0 Y(s)\right]+s\left[b_1 U(s)-a_1 Y(s)\right]+...+s^m\left[b_m U(s)-a_m Y(s)\right]-...-a_{n-1}s^{n-1}Y(s)$$

En divisant par s^n , on obtient :

$$Y(s)=\frac{\left[b_0 U(s)-a_0 Y(s)\right]}{s^n}+\frac{\left[b_1 U(s)-a_1 Y(s)\right]}{s^{n-1}}+...+\frac{\left[b_m U(s)-a_m Y(s)\right]}{s^{n-m}}-...-\frac{a_{n-1}Y(s)}{s}$$

Si on choisit :

$$X_n(s)=Y(s)\rightarrow x_n(t)=y(t)$$
$$X_1=\frac{\left[-a_0 Y(s)+b_0 U(s)\right]}{s}\rightarrow \dot{x}_1=-a_0 x_n+b_0 U(s)$$
$$X_2=\frac{\left[-a_1 Y(s)+b_1 U(s)+x_1\right]}{s}\rightarrow \dot{x}_2=x_1-a_1 x_n+b_1 u$$
$$\vdots$$
$$X_{m+1}=\frac{\left[-a_m Y(s)+b_m U(s)+x_m\right]}{s}\rightarrow \dot{x}_{m+1}=x_m-a_m x_n+b_m u$$
$$X_{m+2}=\frac{\left[-a_{m+1}Y(s)+x_{m+1}\right]}{s}\rightarrow \dot{x}_{m+2}=x_{m+1}-a_{m+1}x_n$$
$$\vdots$$
$$X_n=\frac{\left[-a_{n-1}Y(s)+x_{n-11}\right]}{s}\rightarrow \dot{x}_n=x_{n-1}-a_{n-1}x_n$$

D'où les équations d'état de la forme observable :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -a_m \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dans le cas où $(m = n)$, la fonction de transfert se décompose en une transmission directe et une partie où $(m < n)$. Dans ce cas, la matrice D sera égale à la transmission directe, et la partie où $(m < n)$ sera traitée comme précédemment.

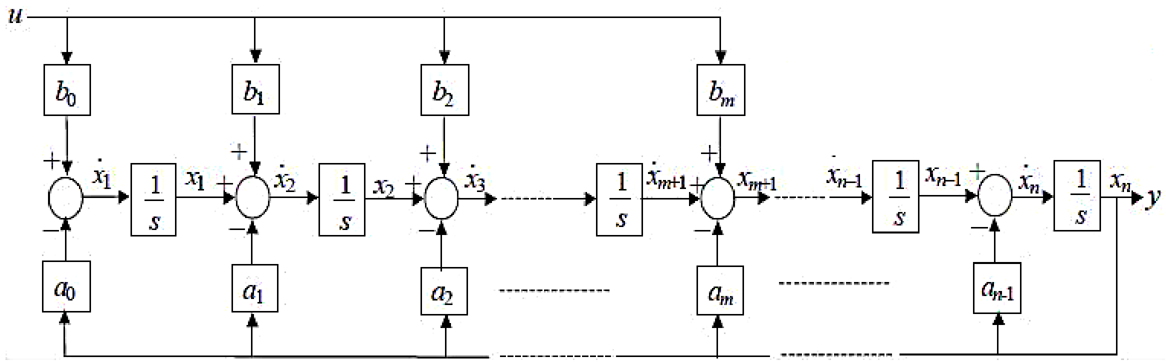

Fig 2.5 Schéma de simulation de la forme observable

Remarque :

On remarque que les deux formes canoniques de commandabilité et d'observabilité sont symétriques : l'une est obtenue par transposition de l'autre par rapport à la diagonale principale. En effet : soit $(A_c,\ B_c,\ C_c,\ D_c)$ la réalisation canonique de commandabilité et $(A_o,\ B_o,\ C_o,\ D_o)$ la réalisation canonique d'observabilité. On constate que :

$$(A_c, B_c, C_c, D_c) = (A_o^T, B_o^T, C_o^T, D_o^T)$$

Cette relation met en évidence la dualité entre les formes canoniques de commandabilité et d'observabilité, où chaque élément de la réalisation canonique de commandabilité est le transposé de celle d'observabilité.

II.7.3 Forme modale

Dans cette forme, si la fonction de transfert ($m<n$) possède des pôles simples, il serais possible de la décomposée en éléments simple comme suit :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s^1+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s^1+a_0}=\frac{\alpha_1}{s+\lambda_1}+\frac{\alpha_2}{s+\lambda_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{s+\lambda_n}\rightarrow$$
$$Y(s)=\frac{\alpha_1}{s+\lambda_1}U(s)+\frac{\alpha_2}{s+\lambda_2}U(s)+\ldots+\frac{\alpha_n}{s+\lambda_n}U(s)$$

Avec : les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A (pôles de $G(s)$).

Posons : $X_1(s)=\dfrac{U(s)}{s+\lambda_1}, X_2(s)=\dfrac{U(s)}{s+\lambda_2},\ldots, X_n(s)=\dfrac{U(s)}{s+\lambda_n}$, on aura :

$$\dot{x}_1(t)=-\lambda_1 x_1(t)+u(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-\lambda_2 x_2(t)+u(t)$$
$$\ldots$$
$$\dot{x}_n(t)=-\lambda_n x_n(t)+u(t)$$

$$y(t)=\alpha_1 x_1(t)+\ldots+\alpha_{n-1}x_n(t)$$

D'où la représentation d'état :

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}-\lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda_1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_{n-1}\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\\ldots\\1\end{bmatrix}u(t) \qquad (2.6)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{bmatrix}X(t)$$

Le schéma de simulation de la forme modale est représenté sur la figure suivante :

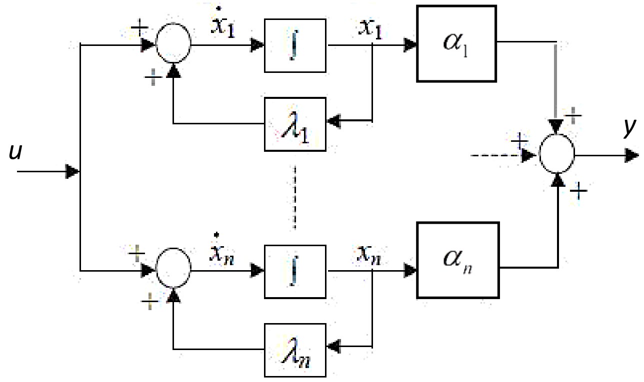

Fig 2.5 Schéma de simulation de la forme modale

<u>Remarque :</u>

- Si le système possède des pôles simples alors la matrice A est diagonale
- Dans le cas $(m=n)$, il y aura une transmission direct α_0, et la matrice $D=\alpha_0$ dans la représentation d'état.

❖ **Cas d'un pôle multiple**

Soit une fonction de transfert $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ possédant un pôle réel multiple d'ordre q ainsi que des pôles simples, on a :

$$Y(s)=\left[\frac{r_1}{(s-\lambda_1)^q}+\frac{r_2}{(s-\lambda_1)^{q-1}}+\dots\frac{r_q}{s-\lambda_1}+\sum_{i=q+1}^{n}\frac{r_i}{s-\lambda_i}+r_0\right]U(s)$$

Si on choisit les variables d'état comme suit :

- Pour le pôle multiple : $X_1=\dfrac{1}{(s-\lambda_1)^q}U;X_2=\dfrac{1}{(s-\lambda_1)^{q-1}};...;X_q=\dfrac{1}{s-\lambda_1}$

Donc : $X_1=\dfrac{1}{s-\lambda_1}X_2;\quad X_2=\dfrac{1}{s-\lambda_1}X_3;\quad \dots;\quad X_{q-1}=\dfrac{1}{s-\lambda_1}X_q;X_q=\dfrac{1}{s-\lambda_1}U$

- Pour les pôles simples : $X_i=\dfrac{1}{s-\lambda_i}U;\quad i=q+1,\dots,n$

Donc : $X_i=\dfrac{1}{s-\lambda_1}X_{i-1}$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on aura :

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1=\lambda_1x_1+x_2\\
&\dot{x}_2=\lambda_1x_2+x_3\\
&...\\
&\dot{x}_q=\lambda_1x_q+u\\
&\dot{x}_i=\lambda_ix_i+u;\quad i=q+1,\dots\\
&y=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i+r_0u
\end{aligned}$$

La représentation d'état sera alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{k-1} \\ \dot{x}_k \\ \dot{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{matrix}}^{\text{Bloc de Jordan}} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{matrix} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (2.10)$$

$$y(t) = [r_1 \ldots\ldots r_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + r_0 u$$

<u>Exercices d'application :</u>

1) Sois la fonction de transfert d'un système $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^3+2s^2-s-2}$, sa représentation d'état sous la forme commandable aura les matrices d'état suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Question :</u> Donnez sa représentation d'état sous la forme observable

2) Sois la fonction de transfert d'un système $G(s) = \frac{1}{(s+1).(s+2)^2}$, sa représentation d'état sous la forme modale de Jordan, aura les matrices d'état suivantes *:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Question :</u> donner le vecteur C