REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTAIRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

BADJIMOKHTAR-ANNABAUNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار- عنابـة

Faculté des Sciences de l'Ingéniorat

Département: Electronique

SUPPORT DE COURS

Commande Intelligente

I. Logique Floue

Domaine : Sciences et Technologie

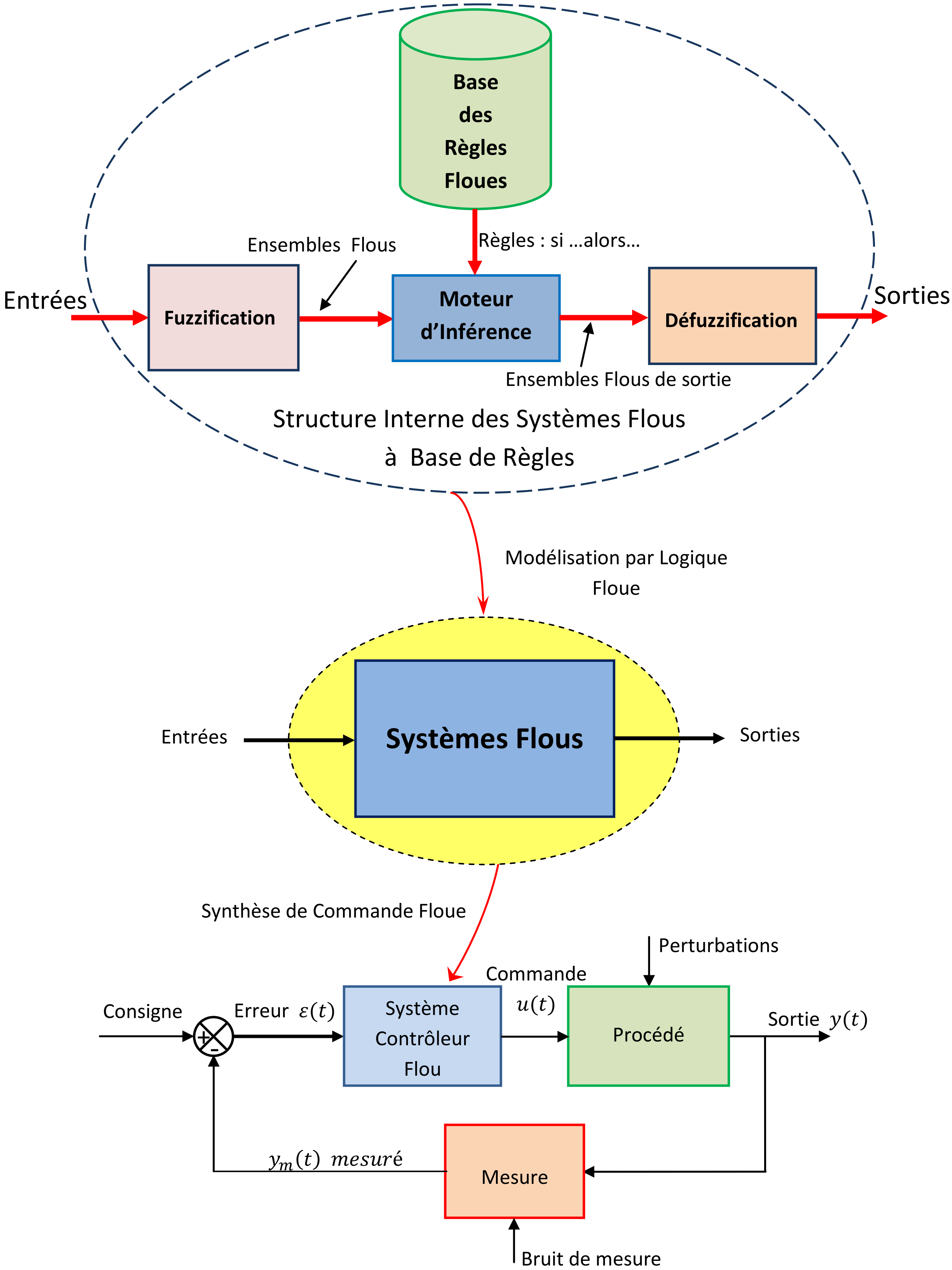
Filière : AUTOMATIQUE

Spécialité: Automatique et Systèmes

Auteur : Dr. Brahim BOULEBTATECHE

Année Universitaire : 2017-2018

بسم الله الرّحمان الرّحيم



Configuration d'un Système Flou en tant que Contrôleur Flou
dans une Boucle de Régulation d'un Procédé

Table des matières

Avant-propos

L'apparition de la commande Intelligente comme un nouveau paradigme en Automatique utilisant les techniques inspirées des solutions des êtres vivants pour résoudre des problèmes de commande très complexes a suscité un grand intérêt parmi les automaticiens. La logique floue, une des techniques très utilisée dans ce nouveau type de commande, permet dans beaucoup d'applications actuelles de se doter de toutes sortes de connaissances qualitatives de concepteurs et d'opérateurs dans l'automatisation des systèmes.

Notamment, les nombreuses applications dans l'électroménager et l'électronique grand public effectuées au Japon en ont été l'élément déclenchant. Machines à laver sans réglage, caméras auto-réglables anti-bougé et de nombreuses autres innovations domestiques ont fait vulgariser le terme « logique floue » à un large public.

Dans l'industrie automobile la logique floue a été implanté avec succès dans les transmissions automatiques, les contrôles d'injection et le système de freinage ABS, l'air conditionné. Les applications de la logique floue se sont également multipliées dans le domaine de l'automatisation des processus de production industriels. La logique floue s'y développe car il s'agit d'une approche essentiellement pragmatique, efficace et générique fondée sur le raisonnement humain. La théorie des ensembles flous fournit une méthode mathématique rigoureuse et facilement réalisable dans des applications temps réel à base de processeurs dédiés flous ; elle permet de transcrire et rendre dynamiques les connaissances des concepteurs ou des opérateurs dans des situations difficiles à maitriser quantitativement.

Ce support de cours traite la première partie du module de Commande Intelligente (CI) que j'enseigne aux étudiants inscrits en Master 2 de la spécialité Automatique et Systèmes, au Département d'Electronique de l'Université Badji Mokhtar de Annaba. Cette partie concerne l'utilisation de la logique floue pour la commande des systèmes dynamiques. En premier lieu, la théorie des ensembles flous est introduite. Ensuite, sont présentés les différents types de systèmes flous et leur application dans le domaine de la modélisation et la commande floue des systèmes dynamiques complexes. La conception des contrôleurs flous dans le cas des systèmes avec ou sans modèles mathématiques disponibles est aussi exposée.

Ces notes de cours se veulent d'être une introduction à la logique floue et au contrôle flou. Les objectifs poursuivis sont d'acquérir les bases théoriques de la logique floue, de comprendre les principes du contrôle flou. En outre, l'outil de simulation de Matlab est largement utilisé pour appréhender les détails d'applications de la commande floue des systèmes dynamiques.

Organisation de ces notes du cours Commande Intelligente.

Partie I : Logique Floue

Ce document résume en trois parties principales l'organigramme concernant l'étude de la logique floue durant ce cours de commande intelligente.

- Introduction : la logique floue est une tentative de réponse au problème de la modélisation du raisonnement humain.

- Bases théoriques de la logique floue : définition d'un sous-ensemble flou, caractéristiques, opérations, principe d'extension, relation floue, implication floue, raisonnement flou, modèles d'inférence floue de Mamdani, de Larsen et de Takagi-Sugéno.

- Le contrôle flou : notion de contrôle, généralités sur le contrôle flou, étude du pendule inversé (expertise, description linguistique, fuzzification, base de règles, adaptation, défuzzification), conception d'un contrôleur flou, méthodes de fuzzification et choix des règles floues, implémentation numérique par Matlab.

Mots clés : commande floue et neuronale, contrôle neuro-flou, commande intelligente, intelligent control, soft computing, fuzzy and neural control, apprentissage machine.

1. Introduction

Les approches de la théorie de la commande conventionnelle sont basées sur des modèles mathématiques obtenus sous forme d'équations différentielles (modèles continus) ou équations aux différences (modèles discrets). A cette fin, des méthodes mathématiques et procédures de conception, d'analyse formelle et vérification des systèmes de commande ont été développées. Cependant, de telles méthodes ne peuvent être employées qu'à des classes de modèles très restreintes, principalement des modèles linéaires et quelques modèles non linéaires de types spécifiques.

L'application pratique des systèmes de commande classique est impuissante dans le cas de situation où il n'existe pas de modèles mathématiques concernant le processus à contrôler, ou bien que ce modèle est tellement non linéaire que les techniques d'analyse habituelles disponibles ne sont plus applicables dans de telles circonstances. Devant cette situation où les exigences techniques et les systèmes réels à traiter deviennent de plus en plus complexes, les chercheurs en automatique et Intelligence Artificielle se sont amenés à unir leurs efforts dans la recherche d'autres alternatives en s'inspirant beaucoup de l'approche biologique abordant de tels problèmes afin de développer de nouvelles méthodologies dans la modélisation de la réalité complexe observée et la conception des systèmes de commande de types nouveaux plus adaptables aux contraintes techniques actuelles qui sont très sophistiquées.

Pour cela, de nouvelles formes de représentation ont été élaborées à base de langage naturel, règles et relations, réseaux sémantiques et des méthodes formelles pour incorporer des informations extra que la commande conventionnelle ne permet pas de traiter (connaissance heuristique pourvue par les opérateurs humains d'un processus).

La commande floue est un exemple de représentation de l'expérience humaine à base de règles et raisonnement déductif.

D'autre part, Les réseaux de neurones artificiels, dont l'étude est réservée pour la deuxième partie de ce cours, possèdent des capacités d'apprentissage et d'adaptation très intéressantes par imitation du fonctionnement des systèmes neuronaux biologiques.

Avec l'avènement d'une grande avancée technologique dans le domaine du traitement de l'information et de calculs, de grandes quantités de données sur les processus complexes sont devenus disponibles. Ceci a permis de combiner une commande à base de connaissance (knowledge-base control) avec des techniques de traitement de données (data-driven techniques) pour l'acquisition des modèles et l'ajustage des contrôleurs. D'où l'apparition en Automatique d'un nouveau paradigme utilisant les techniques neuro-floues appelées aussi commande intelligente. Dans ce contexte, on peut réaliser des modélisations et des stratégies de commandes floues, neuronales et neuro-floues de systèmes complexes. Ces systèmes peuvent être multi variables, non linéaires, stochastiques et/ou non stationnaires dont la commande automatique classique s'avère difficile à implémenter.

2. Théorie des ensembles flous

Ce chapitre présente une introduction à la théorie des ensembles flous (rappels de définitions, propriétés, relations et opérations sur les ensembles flous). En 1965, le Prof. Lotfi Zadeh introduisait le théorie des ensembles flous en tant que discipline mathématique à part entière, bien que les idées sous-jacentes ont été étudiées plus tôt par plusieurs philosophes et mathématiciens logiciens (Pierce, Russel, Lukasiewics, parmi d'autres…). Ensuite, plusieurs développements sont apparus dans ce domaine. Un intérêt accru pour la théorie des ensembles et logique flous a commencé durant les années 70 (Mamdani) et 80 (Takagi et Sugeno) avec l'apparition des premières applications dans le domaine de commande de processus industriels (sidérurgie, métro, cimenterie,…) et d'autres disciplines.

Cette mathématique de l'incertain est d'abord restée très marginale avant de déclencher, 25 ans plus tard, un grand intérêt pour le flou parmi les chercheurs en systèmes. C'est une théorie rigoureuse et bien adaptée pour traiter tout ce qui est subjectif et/ou incertain. Cette théorie est une extension de la logique booléenne dans laquelle les niveaux de vérités, au lieu d'être vrai ou faux, c'est-à-dire 1 et 0, peuvent prendre des valeurs entre 0 et 1. On parle de logique multi-valeur ou à plusieurs niveaux entre 0 et 1 qu'on appelle logique floue.

Domaines d'applications :

→ Problèmes où les données ne peuvent être formulées de manière explicite
→ Techniques de commande et réglage lorsque les moyens classiques atteignent leur limites (systèmes fortement non linéaires et complexes…)

Réglage par la logique floue

Les techniques de régulation 'floue' deviennent intéressantes lorsque la description d'un processus est difficile ou ne peut être représentée par un modèle mathématique. C'est le cas, par exemple, des systèmes complexes qui comprennent plusieurs entrées et sorties (en industrie sidérurgiques, pétrochimiques, réacteurs biologiques et chimiques, en nucléaire, robotique, contrôle de la pollution, etc…) ou dans le cas des systèmes fortement non linéaires (avions ,hélicoptères,…).

L'application de la théorie des ensembles repose sur plusieurs technologies, tel que le clustering flou dans le traitement d'images (classification), identification et détection de défauts et pannes, contrôleurs flous en incorporant les connaissances d'un expert ou opérateur humain dans une boucle de commande, modélisation floue (expertise humaine), optimisation floue pour résoudre des problèmes de conception (design problem).

2.1 Rappel sur la théorie des ensembles (classique)

Définition d'un ensemble : un ensemble est une collection d'objets ou éléments possédant en commun ou vérifiant une même propriété. Plusieurs façons sont utilisées pour définir un ensemble.

- Par énumération (listing) de tous les éléments d'un ensemble fini :- définition en extension
  Ex. l'ensemble $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  L'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et inférieurs à7 s'écrit alors :

$$I = \{2,3,4,5,6\}$$

- Par spécification des propriétés à satisfaire par les éléments de l'ensemble :-définition par compréhension
  A={x/P(x)} où P(x) est une proposition qui est vraie pour tous lés éléments de A et fausse pour le reste des éléments de l'ensemble universel X (ou ens. de référence) contenant A.
  Ex. l'ensemble I s'écrit alors sous la forme suivante :

$$I = \{x \ /x \in \mathbb{N}, 2 \leq x < 7\}$$

- Par utilisation d'une fonction d'appartenance (ou caractéristique) qui vaut 1 pour les éléments de A et 0 pour les autres éléments, notée par $\chi_A(x) est\ définie\ par$:
-

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\ si \quad x \in A \\ 0\ si\ x \notin A \end{cases}$$

Définition : la fonction d'appartenance de l'ensemble A, sous-ensemble de l'univers du discours ou domaine X, et que l'on note par $\mu_A(.)$ est une application de l'ensemble ou domaine X vers $\{0, 1\}$

$$\mu_A(x)\text{: } X \ \rightarrow \ \{0, 1\}\ avec\ \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

A Noter : les opérations sur les ensembles, à savoir l'intersection, l'union et la complémentation, peuvent être convenablement définies au moyen d'opérations algébriques sur les fonctions d'appartenance de ces ensembles.

Les fonctions d'appartenance sont très utiles pour l'approximation de fonctions non linéaires et la modélisation, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : **Régression locale**

Une approche très commune dans l'approximation de fonctions ou relations non linéaires complexes est de les représenter sous forme de concaténation de fonctions plus simples f_i valides ou définies localement sur des ensembles disjoints $A_i,\ \ pour\ \ i = 1,2, \dots .n$

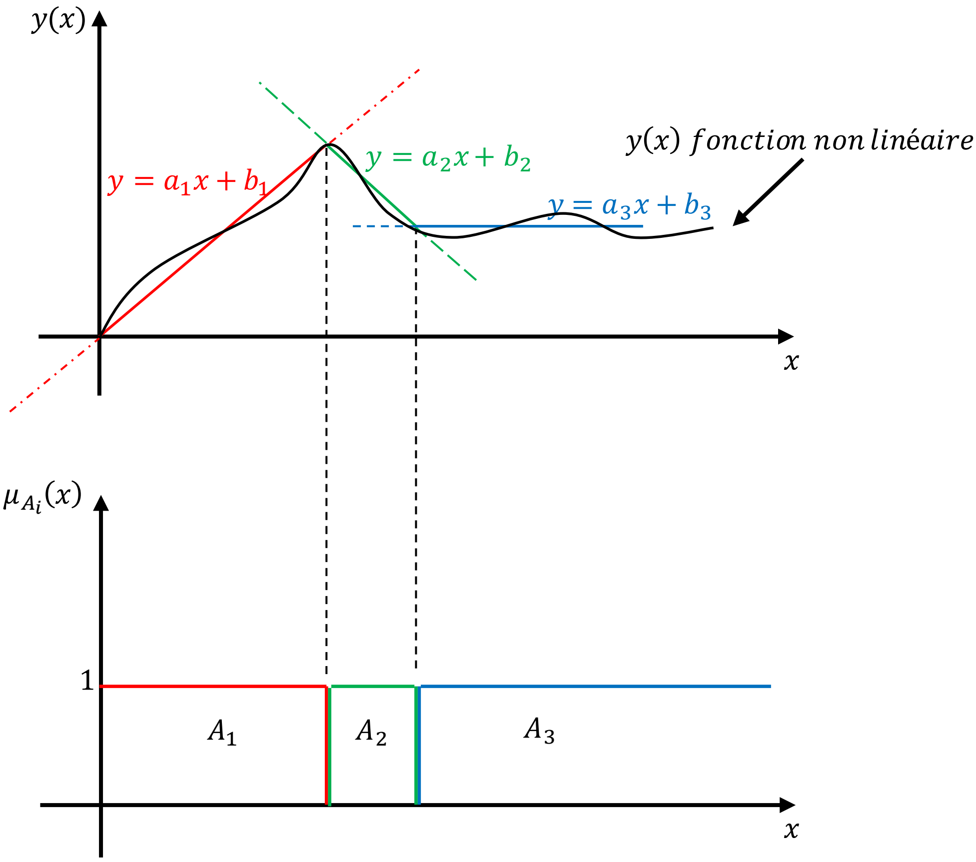
$$y\ ou\ f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ \ x \in \ \ A_1 \\ f_2(x) & si\ \ x \in \ \ A_2 \\ & \dots . \\ f_n(x) & si\ \ x \in \ \ A_n \end{cases}$$

En utilisant la notion de fonctions caractéristiques ou d'appartenance, le modèle $y = fx)$ peut s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$y = fx) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x)\, f_i(x)$$

La figure suivante montre l'exemple d'une fonction non linéaire approximée en concaténant 3 segments linéaires locaux validés sur des sous-ensembles locaux de X et définis par leurs fonctions caractéristiques respectives :

$$y = fx) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x)\,(a_i x + b_i)$$



Exemple d'une fonction linéaire par morceaux

2.1.1 Opérations de base sur les ensembles

→ **Complémentation**

Le complément de A, noté $\overline{A} = \{x, \ / \ x \in X \ et \ x \notin A\}$ c'est l'ensemble des éléments de X qui n'appartient pas à A.

→ **Union**

L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartient à A ou B :

$$A \cup B = \{x, / \ x \in A \ ou \ x \in B\ \}$$

→ **Intersection**

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble contenant tous les éléments qui appartiennent en même temps à A et B.

$$A \cap B = \{x, / \ x \in A \ et \ x \in B\ \}$$

- Les opérations ensemblistes peuvent être représentées en termes d'opérations algébriques appliquées sur les fonctions d'appartenance respectives selon la table logique suivante :

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$\bar{A}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

2.2 Les Ensembles Flous

En théorie classique des ensembles, un élément appartient totalement à un ensemble ou bien il en est totalement exclu, (les frontières délimitant un ensemble sont bien définies et les concepts sont clairs et non ambigus) ; la fonction d'appartenance $\mu_A(x)\ de\ x$ d'un ensemble A classique, sous ensemble de l'univers X, est définie par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \ \ x \notin A \end{cases}$$

Cette stricte classification est très utile en mathématique et d'autres sciences qui reposent sur des définitions bien précises. La théorie classique des ensembles forme un complément dual à la logique binaire où une assertion ou proposition ne peut être que vraie ou fausse mais pas les deux valeurs en même temps. Dans le cas de situations réelles et pour des problèmes où l'information à traiter ou à préserver dans un certain contexte souvent ne permet pas une claire dichotomie entre les ensembles. On ne peut pas dire clairement et précisément si un élément appartient à un ensemble ou pas. Par exemple, si l'ensemble A représente la température chaude à l'intérieur d'une salle alors il est évident que cet ensemble ne possède pas de limites bien définie et claire. On accepte de dire que pour une température de 32° il fait chaud mais que peut-on dire pour une température de 31,9° ou 31,8° ?
Il est convenable de définir une limite au-dessus de laquelle la T° de la maison est chaude (ex. T= 32°) et une limite en dessous de laquelle la T° de la maison n'est pas chaude (ex. T=22°). Entre ces deux limites on observe l'existence d'un intervalle assez vague ou flou où on ne peut pas affirmer clairement s'il fait chaud ou pas dans le langage courant.
C'est dans ce genre de situations qu'intervient la théorie des ensembles flous qui définit un ensemble par une fonction d'appartenance prenant ces valeurs ou degrés dans l'intervalle [0, 1].
Un ensemble flou est un ensemble dont la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle réel [0, 1] c'est-à-dire que $\mu_A(x) \in [0, 1]$. Cela veut dire qu'un élément peut appartenir à un ensemble à un degré différent de 0 et 1 pour représenter mathématiquement des concepts vagues ou mal définis par des adjectifs tel que basse température, grande taille, vitesse rapide ; haute pression etc…

- **Définitions :**

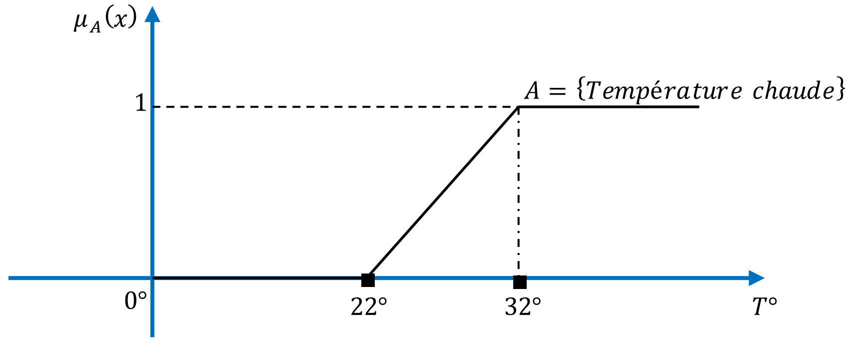
Un ensemble flou A sur un univers du discours ou domaine X est un ensemble défini par une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ appliquée de l'univers X vers l'intervalle unitaire [0,1] :

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \quad x \; est \; totalement \; dans \; A \\ \in \;]0,1[& si \; x \; est \; partiellemnt \; élément \; de \; A \\ 0 & si \quad x \notin A, \quad x \; n'est \; pas \; un \; elt \; de \; A \end{cases}$$

Plusieurs symboles sont utilisés pour représenter la fonction d'appartenance : $\mu_A(x)$, $A(x)$ *ou simplement* a.

Exemple d'un ensemble flou défini par sa fonction d'appartenance formalisant le concept de température chaude dans une maison.



2.2.1 Motivation pour la logique floue

Cet exemple montre les capacités de la logique floue pour appréhender des concepts plus intuitifs mais imprécis qu'entretient le raisonnement humain sans aucune difficultés. On considère la température T° dans une maison : deux possibilités pour définir une valeur de la température à l'intérieur d'une salle :

→ De façon exacte par une valeur numérique, par ex. T=28,3° (à 0,1 prés)
→ Par un intervalle de température : « if fait chaud », « il fait froid », ceci est plus proche du langage courant intuitif pour approcher cette idée de zones ou intervalles de valeurs.

Ex. : Température 'chaude'

- En logique binaire (toutes les conditions ne peuvent prendre que deux valeurs 0 ou 1)
  → Seule possibilité : définir un seuil (par exemple 22°C)
  Si $T \geq 32°C$ *alors la température est chaude*
  Si $T < 32°C$ *alors la température est froide*

Ceci apparait très vite insuffisant, en effet, on a l'ambiguïté suivante :

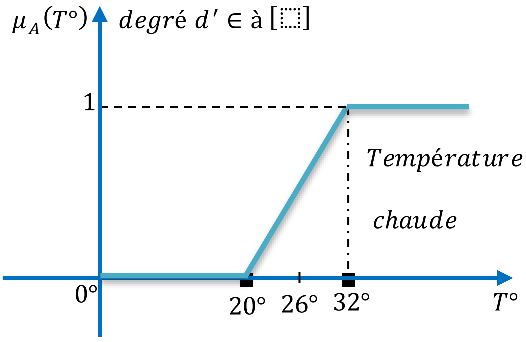
Si $T = 22{,}1°C \rightarrow T°$ " *chaude*"
Si $T = 21{,}9°C \rightarrow T°$ "non chaude" !

→ D'où l'idée de la logique floue

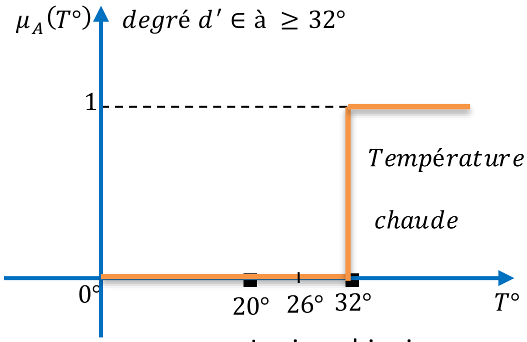
Le but est donc d'approcher le raisonnement humain et travailler non plus sur des conditions binaires mais sur des conditions évaluées sur des intervalles ou zones de valeurs, en l'occurrence, à l'aide d'une logique multi-valeur.

Principe

1. Définition des zones : Exemple Température 'chaude'



Logique floue



Logique binaire

En logique floue, on classe chaque variable en intervalles ou zones :

(T° Chaude, vitesse lente, débit moyen,…)

Contrairement à la logique binaire, la variable considérée peut appartenir plus ou moins à cette zone définie par un intervalle : on fait correspondre à chaque valeur de la variable un degré d'appartenance à l'intervalle en question pouvant varier continument entre 0 et 1 :

$$T° = 18°c \rightarrow degré\ d'appartenance = 0$$

$$T° = 26°c \rightarrow degré\ d'appartenance = 0.5$$

$$T° = 33°c \rightarrow degré\ d'appartenance = 1$$

2.2.2 Propriétés des ensembles flous

Afin d'étudier un fondement mathématique permettant de calculer et de manipuler des ensembles flous, un certain nombre de propriétés doit être défini.

Parmi les définitions on peut citer la hauteur, le support, le noyau, l'écrêtage et la cardinalité d'un ensemble flou. On peut ajouter aussi les propriétés de normalité et convexité d'un ensemble flou.

- **Normalité des ensembles flous**

  L'appartenance d'un élément à un ensemble flou est mesurée par un degré.
  La hauteur d'un ensemble flou est égale au plus grand degré d'appartenance parmi tous les éléments de l'univers X.

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad , \qquad hgt(.) : hauteur\ de\ l'ensemble flou\ A$$

  un ensemble flou est normal s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $\mu_A(x) = 1$.
  Les ensembles flous qui ne sont pas normaux sont appelés sous-normaux.

L'opérateur $norm(A)$, utilisé pour normaliser un ensemble flou, est défini par :

$$A_{normalisé} = norm(A) \Leftrightarrow \mu_{A_{normalisé}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{hgt(A)} \;, \;\; \forall x \; \in X$$

Les propriétés de support, noyau et écrêtage $(\alpha - cut \; ou \; \alpha - coupe)$ d'un ensemble flou sont obtenues en déterminant les éléments dont les fonctions d'appartenance vérifiant certaines conditions.

Définition du support

Le support d'un ensemble flou A est égal au sous-ensemble de l'univers X dont les éléments ont des degrés non nuls :

$$supp\,(A) = \{\, x \;\; ,tel \;\; que \;\; \mu_A(x) > 0\}$$

Définition du noyau (ou core en Anglais)

Le noyau d'un ensemble flou A est égal au sous-ensemble de X dont les éléments ont un degré égal à 1.

$noyau(A) = \{\, x \;\; ,tel \; que \; \mu_A(x) = 1\}$, $noté \; aussi \;\; \ker(A) \;\; ou \;\; core(A)$

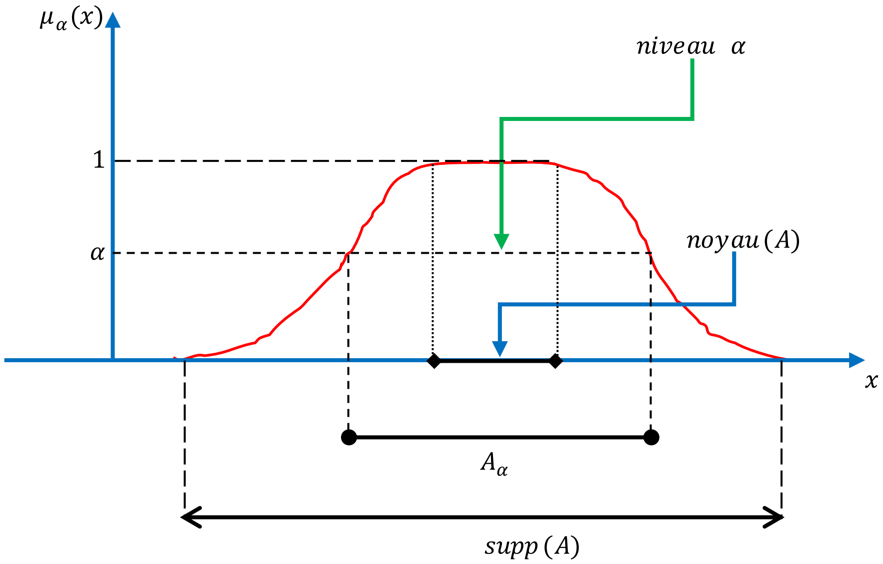
Le noyau d'un ensemble flou sous-normale est vide.

Définition de l'écrêtage $\boldsymbol{\alpha - cut}$ $(\, ou \; \alpha - coupe)$

L'écrêtage ou $\alpha - cut$, $noté \; A_\alpha$, $d'un \; ensemble \; flou \; A$ est égal au sous-ensemble de X dont les éléments possèdent un degré d'appartenance supérieur ou égal à $\alpha \;\; pour \; \alpha \; \in \; [0{,}1]$

$$A_\alpha = \{x, \qquad tel \; que \; \mu_A(x) \geq \alpha \;, \qquad \alpha \;\in\; [0{,}1]\,\}$$

L'opérateur $\alpha - cut$ est noté aussi $\alpha - cut(A) \; ou \;\; cut(A, \alpha)$. La valeur α est appelé le niveau d'écrêtage α $(\alpha - level \; en \; anglais)$.

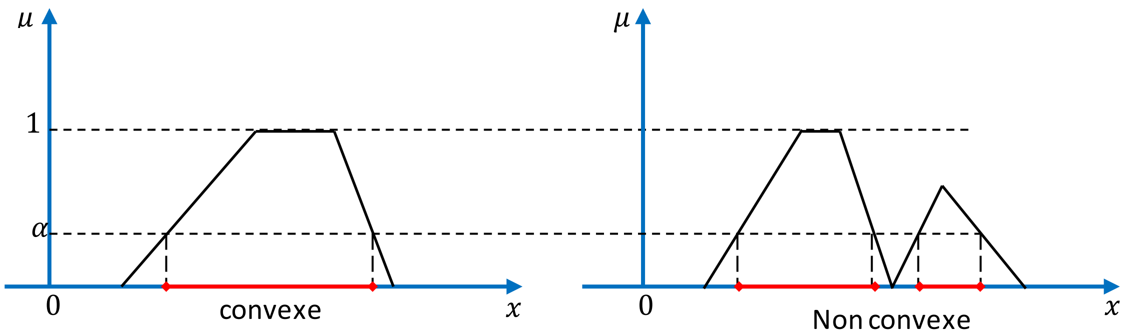


$noyau, support \;\; et \; \alpha - cut \; d'un \; ensemble \; flou$

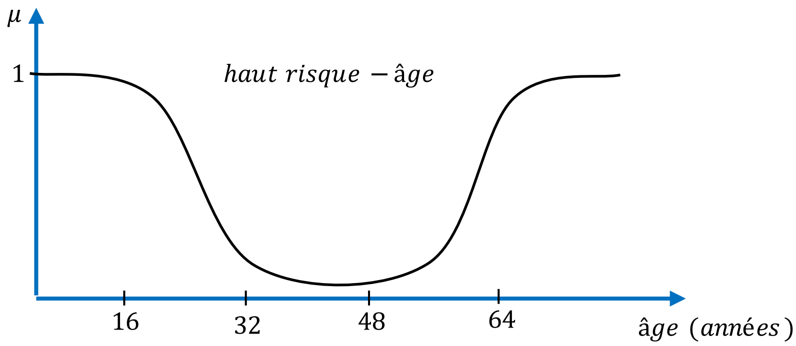
Convexité et Cardinalité

Les fonctions d'appartenance peuvent être uni modale (ayant un maximum global) ou multimodales (ayant plusieurs maximums locaux). Les ensembles flous uni modales sont appelés ensembles flous convexes. La convexité peut aussi être d »finie en termes de $\alpha - cuts$.

Définition : Un ensemble flou défini sur $\mathbb{R}^n$ est convexe si chacun de ses $\alpha - cuts$ est un ensemble convexe.



Exemple d'un ensemble flou non convexe représentant la relation du haut-risque en fonction de l'âge du client pour une compagnie d'assurance véhicule:



2.3 Représentation des ensembles flous

Plusieurs façons sont utilisées pour représenter un ensemble flou :

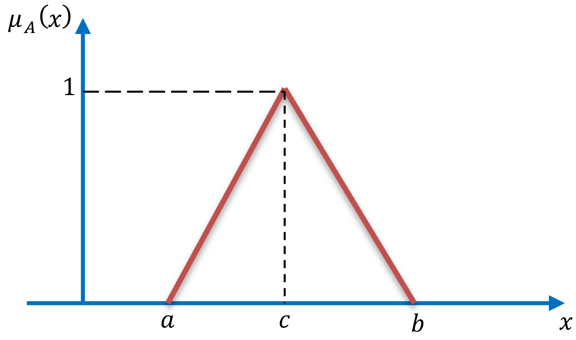
- → Description analytique de sa fonction d'appartenance : $\mu_A(x) = f(x)$
- → Liste des éléments de l'ensemble flou et leur degré d'appartenance
- → Au moyen des $\alpha - cuts$

➤ Représentation par une fonction paramétrique

Plusieurs formes de fonctions d'appartenance paramétriques sont souvent utilisées en théorie de la commande floue, thème de ce cours. On peut citer principalement les fonctions triangulaires, trapézoïdales, gaussiennes et sigmoïdes S et Z.

- **Les fonctions triangulaires**

Elles sont définies par 3 points (a, b, c), a et b points extrêmes, c point milieu.

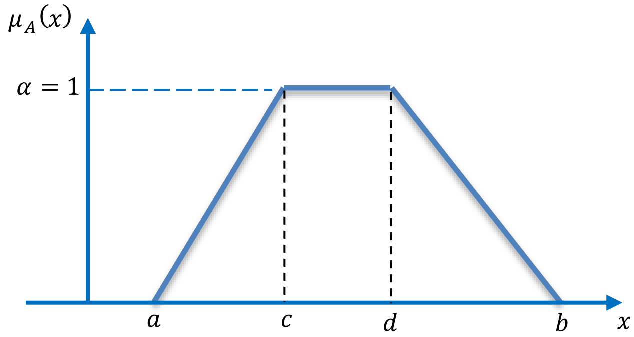


Equation du triangle :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right) & si\ a \le x \le c \\ \alpha\left(\dfrac{x-b}{c-b}\right) & si\ c \le x \le b \\ 0 & autrement \end{cases}$$

- **Les fonctions trapézoïdales**

Elles sont définies par 4 points (a, b, c, d), a et b points extrêmes, c et d abscisses des sommets internes.



Equation du trapèze :

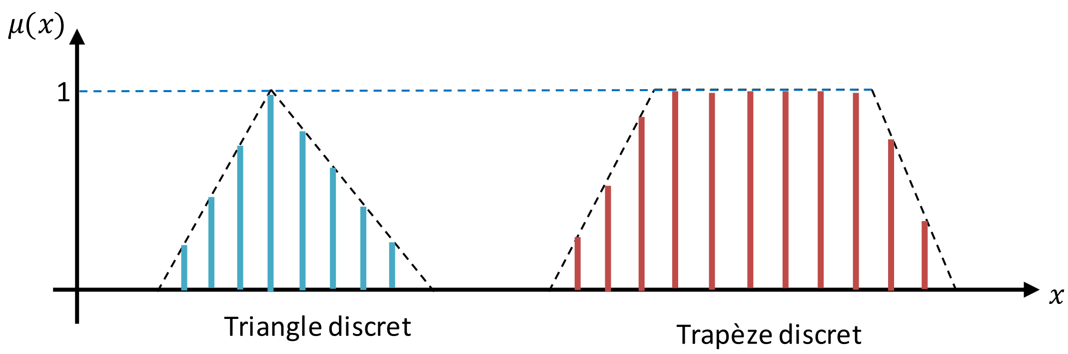
$$\mu_A(x) = \alpha \times \begin{cases} \left(\dfrac{x-a}{c-a}\right) & si\ \ a \le x \le c \\ 1 & si\ \ c \le x \le d \\ \left(\dfrac{x-b}{d-b}\right) & si\ \ d \le x \le b \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Il est possible de combiner ces deux formes dans l'expression suivante :

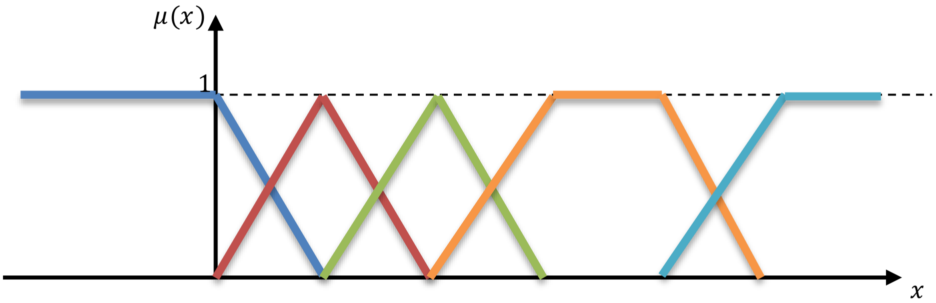
$$\mu_A(x; a, b, c, d) = \max(0, \min\left(\frac{x-a}{c-a}, \alpha\ ou\ 1, \frac{x-b}{d-b}\right)\ , avec\ \ 0 < \alpha \le 1$$

$lorsque\ d = c\ \ on\ obtient\ \ l'équation\ \ du\ \ triangle$

Dans le cas d'un domaine discret on a les représentations suivantes :



Plusieurs ensembles flous peuvent être affichés sur le même graphe :

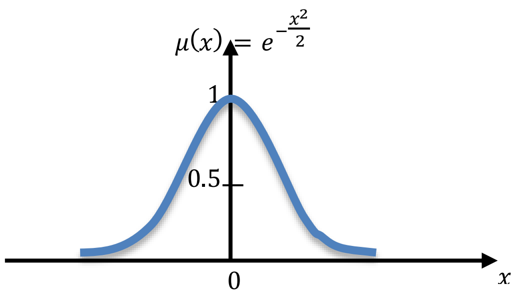


- **Fonctions gaussiennes**

Cette forme est reliée aux distributions de probabilités normales et possède d'excellentes propriétés en pratique. Les fonctions d'appartenance gaussiennes sont données par l'expression générale :

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

Les paramètres c *et* σ déterminent la position du centre et la largeur de la forme de la courbe gaussienne, par exemple, $c = 0$ $(centré\ à\ l'origine)$ *et* $\sigma = 1$ $(excentricité\ ou\ écart - type)$.

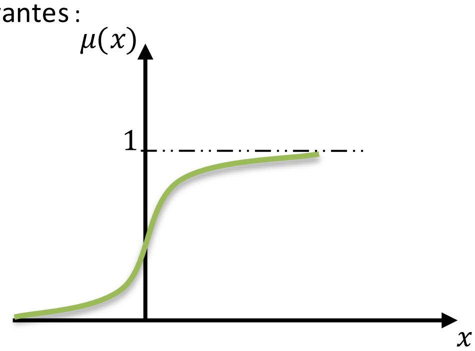


- **Les fonctions sigmoïdes S et Z**

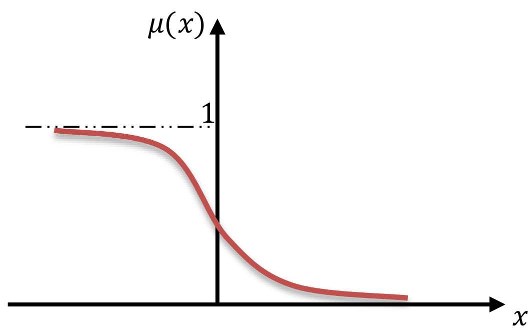
Elles sont exprimées par la formule généralisée suivante :

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + e^{-(x-m)\sigma}}$$

Le graphe d'une fonction sigmoïde selon la valeur de σ est donné par la courbe en S et la courbe en Z suivantes :

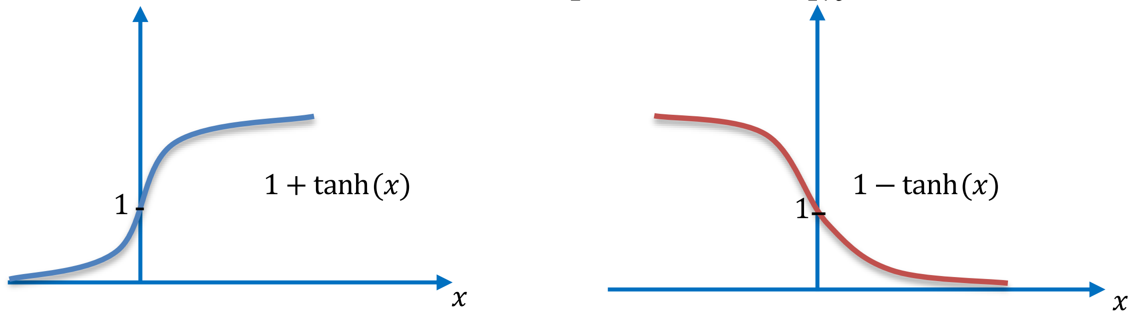


$$\sigma > 0 \quad \rightarrow fonction\ S = \frac{1}{1 + e^{-x+1}}$$

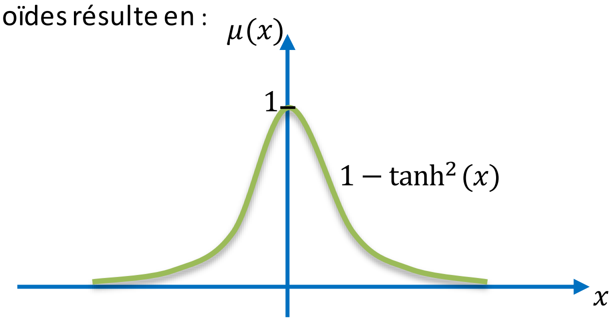


$$\sigma < 0 \quad \rightarrow fonction\ Z = \frac{1}{1 + e^{x-1}}$$

Les valeurs de σ déterminent les fonctions croissantes ou décroissantes tandis que le paramètre m fait déplacer la fonction vers la droite ou la gauche. Ces mêmes courbes peuvent être obtenues à partir des fonctions tangentes hyperboliques puisqu'on a $\frac{1}{2}\ (1+\tanh(x)) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$.



Le produit des 2 sigmoïdes résulte en :

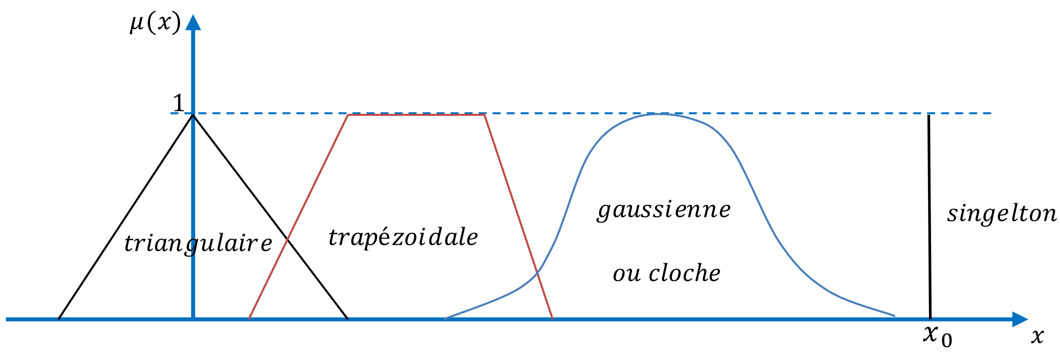


Un ensemble flou particulier est l'ensemble **singleton** ou représentation flou d'un nombre défini par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x = x_0 \\ 0, & autrement \end{cases}$$

Le terme de nombre flou est parfois employé pour nommer un ensemble convexe normal défini sur l'ensemble des réels. L'ensemble universel est défini par $\mu_A(x) = 1 \quad \forall x$.

La figure suivante affiche sur le même graphe une représentation de plusieurs ensembles flous :



➤ Représentation discrète point par point

Pour un ensemble discret $X = \{x_i\ , avec\ i = 1,2, \ldots . . n\}$, un ensemble flou A défini sur X peut être représenté par une liste de couples ou paires ordonnées sous forme de **degré d'appartenance / élément de l'ensemble A** , selon la notation suivante :

$$\boldsymbol{A} = \left\{\frac{\boldsymbol{\mu_A(x_1)}}{\boldsymbol{x_1}}, \frac{\boldsymbol{\mu_A(x_2)}}{\boldsymbol{x_2}}, \ldots . . \frac{\boldsymbol{\mu_A(x_n)}}{\boldsymbol{x_n}}\right\} = \{\boldsymbol{\mu_A(x)/x \quad tel\ que \quad x \in X}\}$$

- En principe seuls les éléments de X dont le degré d'appartenance à l'ensemble flou A n'est pas nul sont affichés sur la liste.
- Pour la programmation sur ordinateur, on utilise un tableau à deux entrées pour sauvegarder et manipuler les fonctions d'appartenance discrètes :

$$x = [x_1, x_2, \dots . x_n] \ \ et\ \mu = [\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots . \mu_A(x_n)]$$

➢ **Représentation par ensembles de niveaux** (Levels sets Representation)

Un ensemble flou peut être représenté par une liste de niveaux α,
$\alpha \in [0,1]\ et\ leurs\ correspondants\ \alpha - cuts$:

$$A = \left\{\frac{\alpha_1}{A_{\alpha_1}}, \frac{\alpha_2}{A_{\alpha_2}}, \dots . , \frac{\alpha_n}{A_{\alpha_n}}\right\} = \{\alpha_i / A_i\ , i = 1 \dots n, et\ \alpha_i \in [0,1]\}$$

- α doit être nécessairement discrétisé.
- Avantage de cette représentation : les opérations entre sous-ensembles flous d'un même domaine deviennent équivalentes à des opérations sur leurs ensembles de niveaux (opération classique),
- $opérations\ sur\ les\ level\ sets\ \rightarrow$
  $Arithmétique\ floue\ sera\ implémenté\ par\ l'arithmétique\ des\ intervalles, etc.$

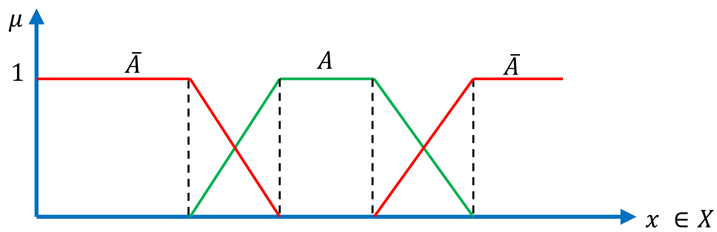
2.4 Opérations sur les ensembles flous

Dans la théorie de la commande floue, où on doit travailler sur des collections de sous-ensembles flous, il est nécessaire d'avoir des moyens utiles pour combiner entre eux. Ces formes de combinaison et manipulation doivent coïncider avec les méthodes et opérations sur les ensembles nettes classiques. Les différents opérateurs employées en théorie des ensembles flous sont appelées connecteurs flous ou opérateurs d'agrégation.

Cette section présente les définitions de base sur l'intersection, l'union et la complémentation des ensembles flous (introduites par Pr. L. A. Zadeh). Des définitions plus générales des opérateurs d'intersection et d'union, appelés normes triangulaires (T-normes) et conormes triangulaires (T-conormes ou S-normes) sont aussi indiquées.

- **Complément d'un ensemble flou**

  Soit A un ensemble flou dans le domaine X. le complément de A est un ensemble flou, $noté\ \bar{A}$, tel que pour chaque $x \in X$: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$



$Graphe\ des\ fontcions\ d'appartenance\ \mu\ d'un\ ensemble\ flou\ A\ et\ son\ complément\ \bar{A}$

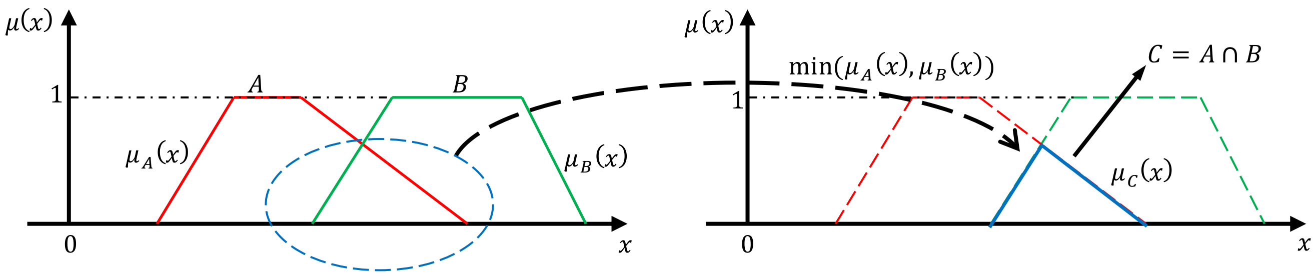
Il existe aussi un autre opérateur de complémentation, c'est le $\lambda - complement$, selon Sugeno (1977). Cependant, cet opérateur n'est pas utilisé en commande floue .

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \frac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\,\mu_A(x)} \quad \text{où } \lambda > 0 \ est\ un\ paramètre.$$

- **Intersection entre deux ensembles flous**

Soient A et B deux ensembles flous définis sur le domaine X, l'intersection de A et B est un ensemble flou C, $noté\ C = A \cap B, tel\ que\ \forall x\ \in X\ on\ a$:

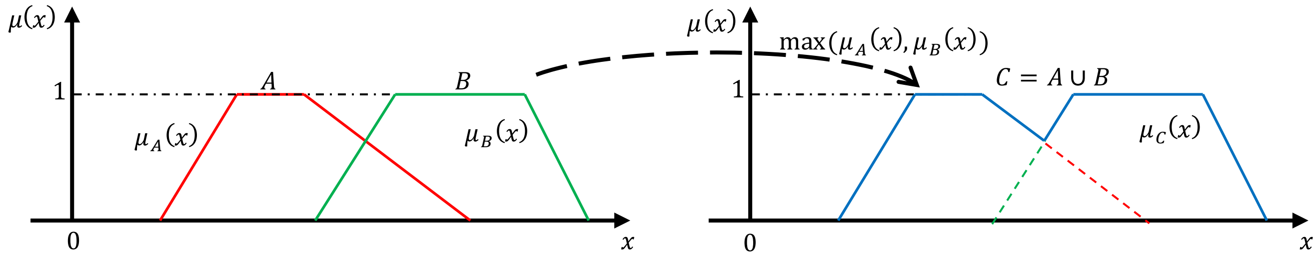
$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$
$$l'opérateur\ du\ minimum\ \ '\mathrm{min}(.,.)'\ \ est\ noté\ '\wedge'$$



- **Union d'ensembles flous**

Soient A et B deux ensembles flous définis sur le domaine X, l'union de A et B est un ensemble flou C, $noté\ C = A \cup B, tel\ que\ \forall x\ \in X\ on\ a$:

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$
$$l'opérateur\ du\ minimum\ \ '\mathrm{max}(.,.)'\ \ est\ noté\ par\ le\ symbole\ '\vee'$$



T-normes et S-normes (ou T conormes)

L'intersection entre 2 ensembles flous peut être spécifiée de façon plus générale par une opération binaire (faisant intervenir deux variables) sur l'intervalle [0,1], c'est-à-dire c'est une fonction de la forme :

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

Pour qu'une fonction T soit équivalente à une intersection floue il faut qu'elle satisfasse certaines propriétés de fonctions, appelées T-normes (acronyme de norme triangulaire) possédant les propriétés d'une intersection floue (ou Conjonction). Celles, nommées T-conormes ou S-normes, sont utilisées pour l'union floue (ou Disjonction) des ensembles.

Définitions :

- **T-norme ou intersection floue**
  Une T-norme est une opération binaire sur l'intervalle unitaire et qui satisfait au moins les axiomes suivants :

$$\forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \mathbf{1}) = \boldsymbol{a} \qquad (\,\boldsymbol{condition\ de\ limite})\ \boldsymbol{\acute{e}l\acute{e}ment\ neutre} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \le \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \qquad (\,\boldsymbol{condition\ de\ monotonie\ de\ T})$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \qquad (\boldsymbol{condition\ de\ commutativit\acute{e}})$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}) \qquad (\boldsymbol{condition\ d'associativit\acute{e}})$$

Exemples de T-normes fréquemment utilisées sont :

$$intersection\ standard\ (\,Zadeh):\ T(a,b) = \min(a,b)$$

$$intersection\ probabilistique\ (produit\ alg\acute{e}brique\,):\ T(a,b) = ab$$

$$intersection\ de\ Lukasiewicz:\quad T(a,b) = \max(0, a+b-1)$$

- L'opérateur du minimum $\wedge$ est le plus grand opérateur T-norme pour l'intersection floue.

- **S-norme ou Union floue**

Une S-norme (ou T-conorme) est une opération binaire sur l'intervalle unitaire et qui satisfait au moins les axiomes suivants :

$$\forall\, \boldsymbol{a, b, c} \in [\mathbf{0, 1}]$$

$$\boldsymbol{S(a, 0) = a} \qquad (\boldsymbol{condition\ de\ limite})\ \boldsymbol{\text{é}l\text{é}ment\ neutre = 0}$$

$$\boldsymbol{b \le c \implies S(a, b) \le S(a, c)} \qquad (\boldsymbol{condition\ de\ monotonie\ de\ S})$$

$$\boldsymbol{S(a, b) = S(b, a)} \qquad (\boldsymbol{condition\ de\ commutativit\text{é}})$$

$$\boldsymbol{S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)} \qquad (\boldsymbol{condition\ d'associativit\text{é}})$$

Exemples de S-normes fréquemment utilisées sont :

$$union\ standard\ (Zadeh):\ S(a, b) = \max(a, b)$$

$$union\ probabilistique\ (somme\ alg\text{é}brique):\ S(a, b) = a + b - ab$$

$$union\ de\ Lukasiewicz:\ S(a, b) = \min(1, a + b)$$

- L'opérateur du maximum ' $\vee$ ' est la plus petite S-norme pour l'union floue.

Exemple : Union floue et Intersection floue

On se donne l'univers de discours ou domaine qui considère la capacité cylindrique d'une voiture :

$$U = \{1.0,\quad 1.2,\quad 1.4,\quad 1.6,\quad 1.8,\quad 2.0\}$$

On définit aussi deux sous-ensembles flous :

A *qui caractérise une " faible consommation ", notée* FC,

et B *pour décrire " une* grande accélération *", notée* GC.

- **Faible consommation** (FC)

U	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
μ_{FC}	1.0	0.9	0.7	0.5	0.2	0.0

- **Grande accélération** (GC)

U	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
μ_{GA}	0.0	0.1	0.4	0.5	0.8	1.0

On en déduit deux nouveaux ensembles flous à savoir :

- **Voiture à faible consommation <u>ou</u> grande accélération** (FC ∪ GA)

$\mu_{FC\cup GA} = \max(\mu_{FC}, \mu_{GA})$	1.0	0.9	0.7	0.5	0.8	1.0

- **Voiture à faible consommation <u>et</u> grande accélération** (FC ∩ GA)

$\mu_{FC\cap GA} = \min(\mu_{FC}, \mu_{GA})$	0.0	0.1	0.4	0.5	0.2	0.0

- **Projection et Extension Cylindrique**

Une **projection** consiste à réduire (en projetant) un ensemble flou défini dans un domaine à plusieurs dimensions (par exemple R^2 ou R^3) sur un ensemble flou de moindre dimension ($ex. R$).

Une **extension cylindrique** est l'opération inverse d'une projection, c'est-à-dire l'extension d'un ensemble flou de faible dimension vers un ensemble flou de dimension élevée.

Définition : **Projection d'un ensemble flou**

Soit $U \subseteq U_1 \times U_2$ $un\ sous-ensemble\ du\ produit\ cartésien\ U_1 \times U_2$.

La projection d'un ensemble flou A défini sur $U\ vers\ U_1$ est l'application $proj_{U_1} : \mathcal{F}(u) \rightarrow \mathcal{F}(u_1)\ exprimée\ par$:

$$proj_{U_1}(A) = \{\sup_{U_2} \mu_A(u) / u_1\ avec\ u_1 \in U_1\}$$

L'opération de projection fait éliminer certaines dimensions (ou variables correspondantes) de l'espace produit en prenant la valeur sup de la fonction d'appartenance par rapport aux dimensions (variables) qu'on veut supprimer.

- De même, on définit la projection d'une relation binaire floue $\mathcal{R}_{XY}(x,y)$ par :

$$1^{\text{ère}} projection : \mathcal{R}_1 = \{x, \max_y \mu(x,y)\ , \quad (x,y) \in X \times Y$$
$$2^{\text{ème}} projection : \mathcal{R}_2 = \{y, \max_x \mu(x,y)\ , \quad (x,y) \in X \times Y$$

Exemple de projection :

On suppose un ensemble flou A défini dans $U \subseteq X \times Y \times Z$
$avec\ \ X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2\}\ et\ Z = \{z_1, z_2\}\ comme\ suit:$

$$A = \{\mu_1\ /(x_1,y_1,z_1);\ \mu_2\ /(x_1,y_2,z_1); \mu_3\ /(x_2,y_1,z_1);\ \mu_4\ /(x_2,y_2,z_1);\ \mu_5\ /(x_2,y_2,z_2)\}$$

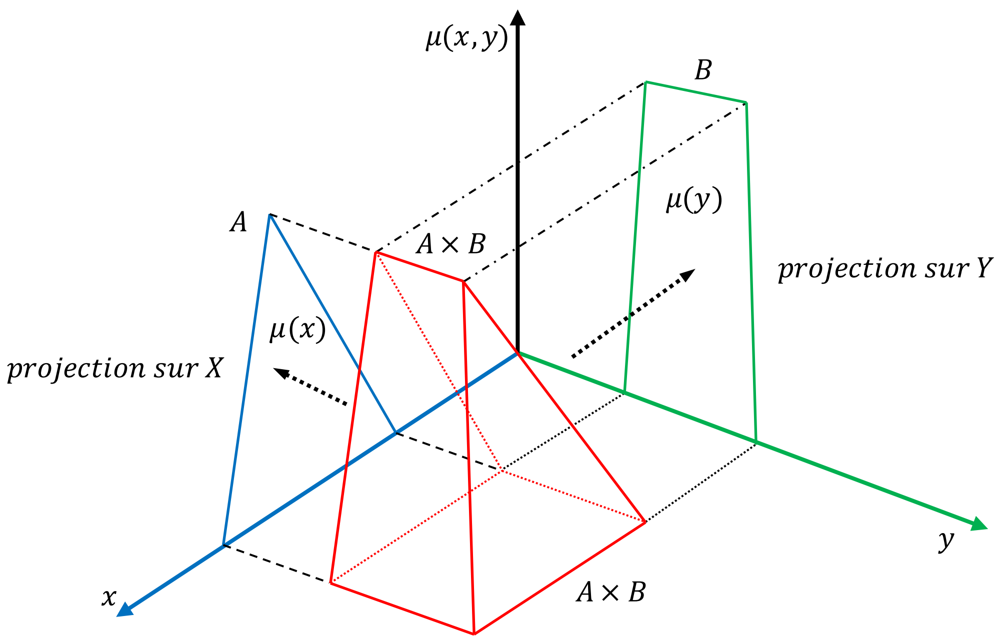
Déterminons les projections de A sur X , $Y\ et\ X \times Y$:

$proj_X(A) = \{\max(\mu_1,\mu_2)\ /x_1, \max(\mu_3,\mu_4,\mu_5)\ /x_2\}$

$proj_Y(A) = \{\max(\mu_1,\mu_3)\ /y_1, \max(\mu_2,\mu_4,\mu_5)\ /y_2\}$

$proj_{X\times Y}(A) = \{\mu_1/(x_1,y_1), \mu_2\ /(x_1,y_2),\ \mu_3\ /(x_2,y_1)\ , \max(\mu_4,\mu_5)/(x_2,y_2)\}$

Exemple graphique d'une projection de R^2 sur R :



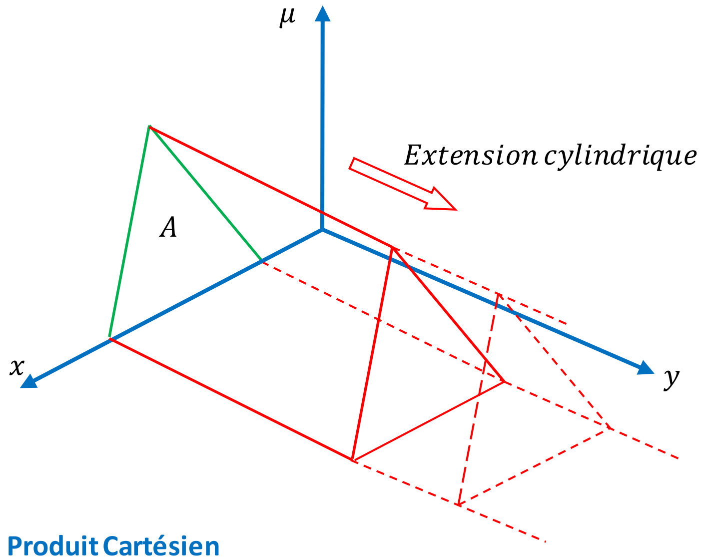
- **Extension Cylindrique**

Soit $U \subseteq U_1 \times U_2$ $un\ sous-ensemble\ de\ l'espace\ produit\ cartésien\ U_1 \times U_2$.

On appelle extension cylindrique d'un ensemble flou A défini sur $U\ vers\ U_1$ l'application $ext_U : \mathcal{F}(u_1) \rightarrow \mathcal{F}(u)\ exprimée\ par$:

$ext_U(A) = \{\mu_A(u_1)\ /u\ avec\ u \in U\}$

L'extension cylindrique ne fait que répliquer les degrés d'appartenance des dimensions réduites vers les nouvelles dimensions plus larges.



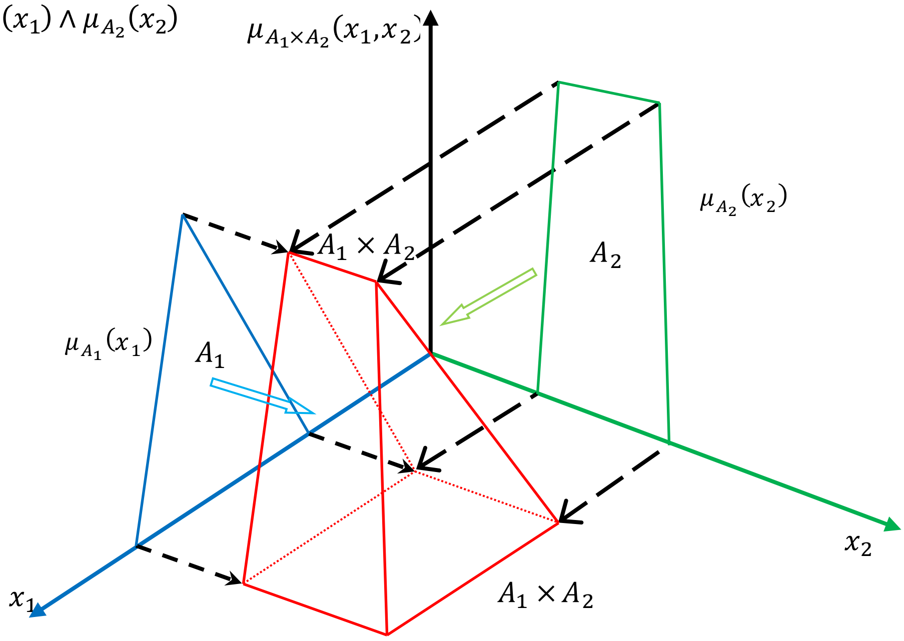
Intersection du Produit Cartésien

On considère deux ensembles flous A_1 et A_2 définis sur les domaines X_1 et X_2 respectivement. L'intersection $A_1 \cap A_2$, notée aussi $A_1 \times A_2$ est donnée par :

$$A_1 \times A_2 = ext_{X_2}(A_1) \cap ext_{X_1}(A_2)$$

Cette extension cylindrique est d'habitude considérée implicitement ; elle n'est pas citée dans les notations.

$\mu_{A_1 \times A_2}(x_1,x_2) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)$



2.2.5 Relations Floues

Une relation floue est un ensemble flou dans le produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ dont le degré d'appartenance (ou fonction caractéristique) représente le degré d'association (corrélation) entre les éléments des domaines X_i . Une relation indique la présence ou l'absence d'association, d'interactions ou d'interconnections entre les éléments de deux ou plusieurs ensembles. Une relation binaire est une relation entre deux ensembles.

Par exemple : $\mathcal{R}(x, y) = (x \; AND \; y), \;\; x \in X \; et \; y \in Y.$

Une relation floue $\mathcal{R}(x, y)$ est un sous-ensemble flou de $X \times Y$. La fonction d'appartenance $\mu(x, y)$ est telle que :

$$\mathcal{R} = \{\mu(x,y) : X \times Y \;\; \rightarrow \;\; [0,1]\} \; ou$$

$$\mathcal{R} = \{(x,y), \mu(x,y)\} = \cup \; (x,y) \; \mu_R(x,y)$$

Exemple d'une relation floue $\mathcal{R} = \{x \approx y\}$ qui veut " x *est approximativement égal* à y " définie par la fonction d'appartenance $\mu_R(x, y) \; = \; e^{-(x-y)^2}$.

Une relation floue peut être décrite par :

- Une fonction d'appartenance analytique.
- Une matrice si le nombre d'éléments est fini.

- **Composition de relations**

La combinaison d'ensembles flous et de relations floues est appelée composition.

Soient les deux relations suivantes :

$$\mathcal{R}(x,y) \quad (x,y) \in X \times Y \qquad \mathcal{R} : X \times Y \; \rightarrow \; [0,1]$$

$$\mathcal{S}(y,z) \quad (y,z) \in Y \times Z \qquad \mathcal{S} : Y \times Z \; \rightarrow \; [0,1]$$

La composition de ces deux relations, notée $C(x, z) = \mathcal{R}(x, y) \circ \mathcal{S}(y, z)$ est définie de plusieurs manières par:

- $Composition \; \boldsymbol{max - min}$

$$\mu_C(x,z) = \max_y\{\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))\} \;\; x \in X, y \in Y \; et \; z \in Z$$

- $Composition \; \boldsymbol{produit - max}$

$$\mu_C(x,z) = \max_y\{\mu_R(x,y) \times \; \mu_S(y,z)\} \;\; x \in X, y \in Y \; et \; z \in Z$$

- **Définition des Variables Linguistiques**

Plusieurs auteurs utilisent différentes notions pour définir une variable linguistique pour qualifier des concepts flous ou grandeurs incertaines et imprécises. A titre d'exemple, on peut citer les définitions suivantes :

Lotfi Zadeh : "Par variable linguistique on veut dire une variable dont les valeurs ce sont des mots qualificatifs ou phrases adjectives dans un langage naturel ou artificiel"

Driankov : on représente une variable linguistique et la structure floue d'un système par le quadruplet suivant :

$$\langle \; X \;, \mathcal{L}X \;\;, \mathcal{X} \;\;, M_x \;\rangle$$

$nom\ de\ variable\ linguistique$

$ex.\ Age, vitesse, taille\ \ldots$

$ensemble\ des\ valeurs$

$linguistiques\ de\ X$

$ensemble\ universel$

$ou\ univers\ du\ discours$

$fonction\ d'appartenance$

- **Modificateur linguistique**

Soit A un ensemble flou sur X défini par :

$$\mu_A(x):\;\; X \;\; \rightarrow \;\; [0,1]$$

Définition :

La concentration (CON), et la dilatation (DIL) appliquées à l'ensemble flou A sont définies par les fonctions d'appartenance suivantes :

$$\mu_{CON_A}(x) = [\mu_A(x)]^2 \;\; \rightarrow trés\ (A), trés\ trés\ (A)..$$

$$\mu_{DIL_A}(x) = [\mu_A(x)]^{0.5} \;\; \rightarrow plus\ ou\ moins\ (A), autour\ de\ (A) \ldots$$

$$opération\ d'intensification\ de\ contraste$$

$$\mu_{INT-A}(x) = \begin{cases} 2\,[\mu_A(x)]^2 & pour\;\; 0 \le \mu_A(x) \le 0.5 \\ 1 - 2[1-\mu_A(x)]^2 & pour\; 0.5 \le \mu_A(x) \le 1 \end{cases}$$

Relations Floues (suite)

- ❖ Une relation est une description mathématique d'une situation où certains éléments de quelques ensembles sont reliés les uns aux autres d'une certaine manière. Il existe plusieurs types de relations- produits, fonctions, relations d'équivalence, relations d'ordre total ou partiel, etc...
- ❖ Une relation n-ary floue dans $X_1 \times X_2 \times \ldots\ldots \times X_n$ est un sous-ensemble flou :

$$\mathcal{R}: X_1 \times X_2 \times \ldots\ldots \times X_n \;\; \rightarrow \;\; [0,1]$$

Une relation n-ary floue sur X est un sous-ensemble flou défini par :

$$\mathcal{R}: X \times X \times \ldots\ldots \times X \;\; \rightarrow \;\; [0,1]$$

Exemple :

Ex.1 : $X = \{2,3,4,6,8\}\ et\ R\ est\ une\ relation\ tel\ que\ \ (x,y) \in R\ ssi\ \ x\ divise\ y\ \ \ alors$:
$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (6,6), (8,8)\,\}$

Ex.2 : Si X est l'ensemble des réels et Q est une relation binaire floue sur X définie par $'\,Q(x,y)\ est\ le\ degré\ par\ lequel\ x\ est\ proche\ de\ y', ainsi\ on\ peut\ décrire\ Q\ par\ une\ fonction$:

$$Q(x,y) = \frac{1}{|x-y|+1}$$

$on\ observe\ \ que\ Q(x,x) = 1\ \ \forall x\ , alors\ Q(2,8) = \frac{1}{7}$.

Si X est fini, par exemple $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, une relation floue peut être représenté par une matrice dont $l'élément\ ij\ est\ R(x_i,x_j)$. Dans le cas où les éléments de cette matrice prennent uniquement des valeurs 0 ou 1 alors la relation R est une relation ordinaire classique. Ainsi, la relation R définie ci-dessus sur $X = \{2,3,4,6,8\}$ peut être représenté par :

$R(x,y)$	2	3	4	6	8
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0
6	1	1	0	1	0
8	1	0	1	0	1

Par contre la relation floue $Q(x,y)$ restreinte au domaine X peut être décrite par :

$Q(x,y)$	2	3	4	6	8
2	1	1/2	1/3	1/4	1/5
3	1/2	1	1/2	1/3	1/4
4	1/3	1/2	1	1/2	1/3
6	1/4	1/3	1/2	1	1/2
8	1/5	1/4	1/3	1/2	1

Du fait que ces relations soient des formes spéciales d'ensembles flous alors toutes les opérations pour manipuler les ensembles flous sont applicables aux relations floues, et particulièrement la composition des relations.

Définition

Si R est une relation floue binaire sur $X \times Y$ et Q une autre relation binaire floue dans $Y \times Z$ la composition $max - \min de\ R\ et\ Q\ est\ définie\ par$:

$$(R°Q)(x,z) = \bigvee_{y\in Y}\Big(R(x,y) \bigwedge Q(y,z)\Big)$$

Exemple :

Soit $X = \{x_1,x_2,x_3\}$, on définit sur X deux relations $R\ et\ Q\ données\ par$:

$R_X =$

R	x_1	x_2	x_3
x_1	0.9	0.2	0.2
x_2	0.9	0.4	0.5
x_3	1.0	0.6	1.0

$Q_X =$

Q	x_1	x_2	x_3
x_1	0.3	0.8	0
x_2	0	0.6	1.0
x_3	0.3	0.8	0.2

$alors\ l'élément\ ij\ de\ \ R°Q\ est\ égal$ à $\bigvee_{k=1}^{3}\big(R(x_i,x_k) \wedge Q(x_k,x_j)\big)$ $ce\ qui\ donne$:

$R°Q =$

$R°Q$	x_1	x_2	x_3
x_1	0.3	0.8	0.2
x_2	0.3	0.8	0.4
x_3	0.3	0.8	0.6

Noter : On emploie ici le même principe de calcul du produit matriciel usuel mais en remplaçant la multiplication des termes par la fonction min et leur somme par la fonction max.
En résumé : une relation floue R entre un ensemble X et un ensemble Y est un ensemble flou dans le produit directe $X \times Y$ défini par : $X \times Y = \{(x,y) tel\ que\ x \in X, y \in Y\}$ caractérisé par une fonction d'appartenance :

$\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1] \quad X \subseteq \mathbb{R}$,

$pour\ x, y \in X\ \ la\ relation\ (y\ est\ plus\ grand\ que\ x)\ est\ une\ realtion\ floue\ R\ qui\ est\ caractérisée\ \ par\ une\ fonction\ \ d'appartenance\ suivante$:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \geq y \\ \dfrac{10}{10 + \left(\dfrac{10}{y-x}\right)^2} \quad si\ x < y \end{cases}$$

- **Opérations sur les relations floues**

$\boldsymbol{Inclusion}$: $R \subseteq S \Leftrightarrow \mu_R(x,y) \leq \mu_S(x,y)$

$\boldsymbol{Union}$: $R \cup S \Leftrightarrow \mu_{R\cup S}(x,y) = \mu_R(x,y) \bigvee \mu_S(x,y)$

$\boldsymbol{Intersection}$: $R \cap S \Leftrightarrow \mu_{R\cup S}(x,y) = \mu_R(x,y) \bigwedge \mu_S(x,y)$

$\boldsymbol{Complémentation}$: $\bar{R} \leftrightarrow \mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$

$\boldsymbol{Composition\ de\ relations\ floues}$:

$$\left.\begin{matrix} R \leftrightarrow \mu_R(x,y) \\ et \\ S \leftrightarrow \mu_S(y,z) \end{matrix}\right\} \rightarrow R°S \leftrightarrow \mu_{R°S}(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \left(\mu_R(x,y) \bigwedge \mu_Q(y,z)\right)$$

- **Implication et Règle d'Inférence Compositionnelle**

Soient les univers respectifs pour le signal d'erreur e et l'entrée u (ou signal de commande) :

$$U_e = \{-5, -2.5, 0, 2.5, 5\}$$
$$U_u = \{-2, 0, +2\}$$

On définit les ensembles flous suivant :

- Pour le signal d'erreur e
  - Une erreur large positive caractérisée par $\mu_{lpe} = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0.6 \ \ 1]^T$
  - Une erreur petite positive caractérisée par $\mu_{ppe} = [0 \ \ 0 \ \ 0.3 \ \ 1 \ \ 0.3]^T$
- Pour le signal de commande u
  - Un signal de commande positif est $\mu_{scp} = [0 \ \ 0.2 \ \ 1]^T$
  - Un signal de commande zéro est $\mu_{scz} = [0.1 \ \ 1 \ \ 0.1]^T$

Soit A et B deux ensembles flous, non nécessairement définis sur le même univers de discours. L'implication entre A et B est une relation $R_{A\to B}$ $que\ l'on\ représente\ par$:

$$R:\ A\to B\ \equiv\ A\otimes B \quad \text{où } \otimes \text{ produit matriciel}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \times [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m] = \begin{bmatrix} a_1\wedge b_1 & a_1\wedge b_2 & \dots & a_1\wedge b_m \\ a_1\wedge b_1 & a_1\wedge b_2 & \dots & a_1\wedge b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1\wedge b_1 & a_1\wedge b_2 & \dots & a_1\wedge b_m \end{bmatrix}$$

Exemple d'application : calculer $R_{A\to B}$ pour les ensembles flous A et B tels que :

$$A = \text{‘}erreur\ large\ positive' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad et \quad B =' signal\ de\ commande\ positif' = [0\ \ 0.2\ \ 1]$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} \times [0\ \ 0.2\ \ 1] = \begin{bmatrix} 0\wedge 0 & 0\wedge 0.2 & 0\wedge 1 \\ 0\wedge 0 & 0\wedge 0.2 & 0\wedge 1 \\ 0\wedge 0 & 0\wedge 0.2 & 0\wedge 1 \\ 0.6\wedge 0 & 0.6\wedge 0.2 & 0.6\wedge 1 \\ 1\wedge 0 & 1\wedge 0.2 & 1\wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Règle d'Inférence Compositionnelle**

Soit $R_{A\to B}$ une relation entre les univers U_1 et U_2 d'une part, et A' $un\ ensemble\ flou\ sur\ U_1$. Alors la règle compositionnelle (modus ponens) est exprimée par :

$$A'\circ R_{A\to B} = B'\ ; \qquad modus\ ponens : \frac{hypothèse\ A' \quad et\ \ implication\ \ A\to B}{déduire\ la\ conclusion\ \ B'}$$

L'ensemble flou résultant B' est défini sur U_2 et le symbole° représente l'opérateur de composition.

Exemple : On considère la règle floue $R_{A\to B}$ trouvée auparavant et un nouvel ensemble flou A' qui est égal à $'plus\ ou\ moins\ A'$, c'est-à-dire que $\mu_{A'} = [\mu_A]^{1/2} \ \rightarrow\ \mu_{A'} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0.6\ \ 1]^{1/2} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0.77\ \ 1]$.

On obtient alors $A'\circ R_{A\to B} = B'$ en utilisant la composition max-min :

$$B' = A^{'}\circ R_{A\to B} = [\ 0\ \ 0\ \ 0.77\ \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} = [\ 0\ \ 0.2\ \ 1]$$

3 Systèmes flous

3.1 Introduction aux systèmes Flous

Systèmes **D**ynamiques ou **S**tatiques **+ E**nsembles **F**lous ⟶ **S**ystèmes **F**lous

La théorie des ensembles flous intervient au niveau d'un système de différentes façons :

- Dans la description du système l'aide de règles floues de type si ...alors..., ou relations floues, par exemple, une règle floue décrivant une relation entre la puissance du chauffage et la température à l'intérieur d'une chambre. Si la puissance du chauffage est grande alors la T° va augmenter rapidement.
- Dans la spécification des paramètres du système dont les paramètres ce sont des nombres flous représentés par des fonctions caractéristiques d'ensembles flous. Les nombres flous expriment l'incertitude sur les valeurs des paramètres.

Systèmes ⟷ ***Modèles mathématiques à base d'équations différentielles ou algébriques paramétrés par des nombres flous***.

Exemple d'une droite floue représentée par l'équation floue :$y = \tilde{2}x + \tilde{8}$ avec $\tilde{2}\ et\ \tilde{8}$ deux nombres flous 'environ 2' et 'environ 8' exprimant l'incertitude sur la valeur des paramètres

- Les variables d'entrée, de sortie et d'état d'un système peuvent être des ensembles flous entrées flous indiquant une lecture de données ou mesures par des capteurs non fiables, ou des quantités reliées à la perception humaine tel que confort, beauté, couleur , joie ... de telles informations sont traitées par les systèmes flous, ce qui n'est pas le cas avec de systèmes conventionnels.

Cependant, en pratique et principalement en Automatique, la plupart des systèmes flous sont représentés au moyen de règles si ...alors, on les appelle systèmes à base de règles.

Les systèmes flous interviennent dans plusieurs applications : modélisation, analyse de données prédiction et commande de systèmes dynamiques non linéaires et complexes.

- **Systèmes flous à base de règles**

Les relations entre variables sont représentées par des règles $\boldsymbol{si}$ ... $\boldsymbol{alors}$ de la façon suivante :

Si 'Proposition Antécédente' ou Prémisse **Alors** 'Proposition Conséquente' ou Conséquence.

Exemple d'une proposition floue : x est grand où grand est valeur ou terme linguistique défini par un ensemble flou ou variable linguistique sur un univers de discours de la variable x.

Les modificateurs linguistiques peuvent être utilisés pour modifier le sens des valeurs linguistiques.

- Prémisse ou proposition antécédente : proposition floue de type $\boldsymbol{si\ \ x\ est\ A\ ou\ A(x)}$ où x: variable linguistique
  A : *valeur ou terme linguistique et* $A(x)$ *fonction d'appartenance de* A

Selon la structure particulière de la proposition conséquence, on distingue 3 types de modèles flous principaux :

- Modèle flou linguistique (Zadeh 1973, Mamdani 1977) : prémisses et conséquences sont des propositions floues
- Modèle relationnel flou (Pedrycz 1984, Yi et Chung 1993) : généralisation du modèle linguistique une prémisse particulière est associée à plusieurs conséquences via relations floues
- Modèle Takagi-Sugéno (Takagi-Sugéno 1985) : conséquence est une fonction analytique classique (crisp function en anglais)

3.2 Modèle Linguistique

Utilisé pour acquérir une expérience ou savoir qualitatif à base de règles si… alors :

$$\mathcal{R}_i:\ \ si\ \ x\ \ est\ \ \ A_i\ \ \ alors\ y\ est\ B_i \qquad i = 1,2,\dots,K$$

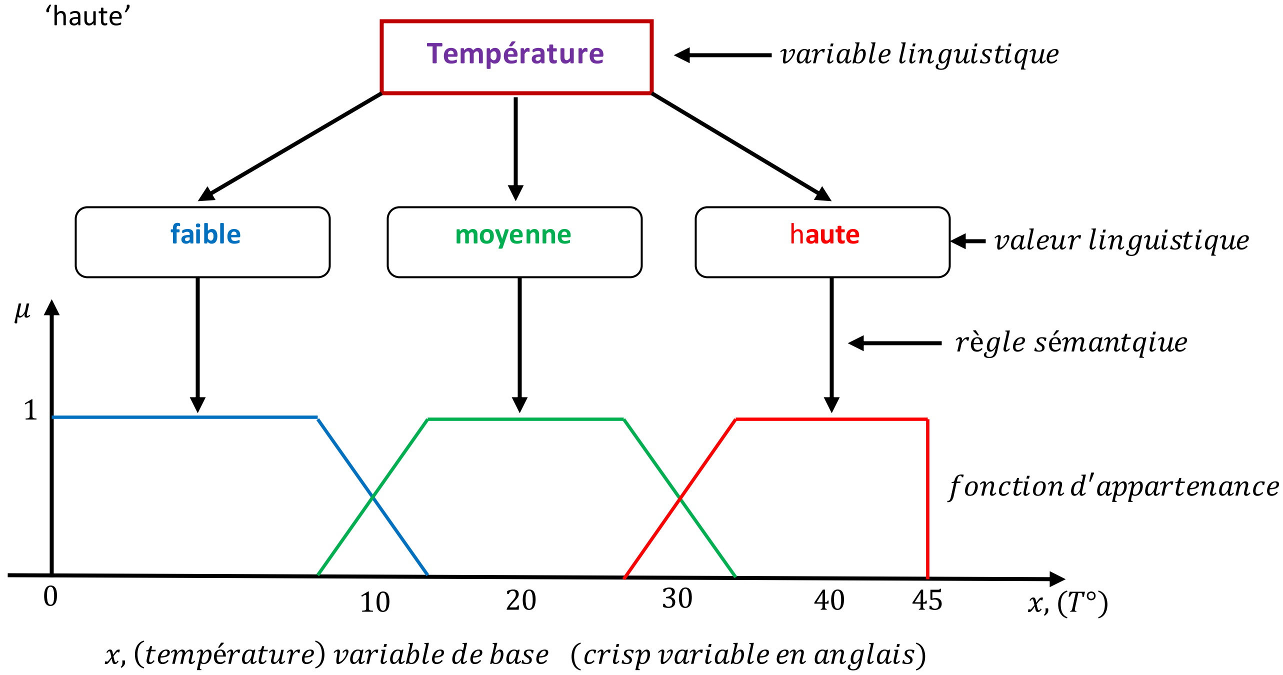
$$\text{où } x\text{: } variable\ linguistique\ d'entrée(prémisse)$$

$$y\text{: } variable\ linguistique\ de\ sortie\ (conséquence)$$

$$A_i\text{: } valeur\ linguistique\ (ensemble\ flou), prémisse$$

$$B_i\text{: } valeur\ linguistique\ (ensemble\ flou), conséquence$$

Exemple de variable linguistique 'température' avec ses 3 termes linguistiques 'faible', 'moyenne' et 'haute'



- **Exemple d'un modèle linguistique**

On considère un simple modèle flou qui décrit qualitativement la dépendance de la puissance du chauffage d'un bruleur à gaz en fonction du débit d'oxygène (supposée constante). On a une entrée scalaire, le débit d'oxygène x, et une sortie scalaire, la puissance chauffante y. On définit un ensemble de termes linguistiques (ensembles flous) en entrée (prémisse):

$$\mathcal{A} = \{bas, bon, haut\}$$

et un ensemble de termes linguistiques (ensembles flous) en sortie (conséquence) :

$$\mathcal{B} = \{bas, haut\}$$

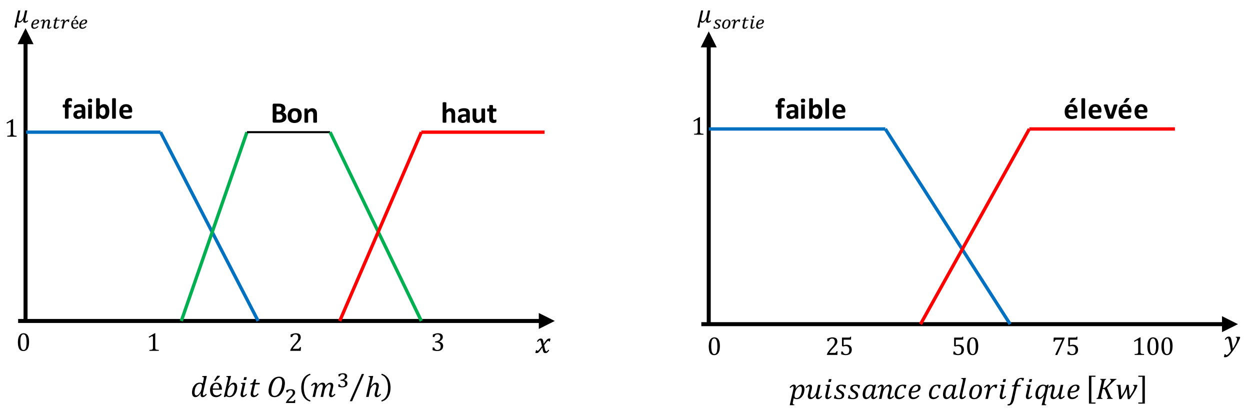
La relation qualitative entre le modèle d'entrée et de sortie est exprimée par les règles suivantes :

$$\mathcal{R}_1: \ \boldsymbol{si} \ \ le\, débit\, d'\, O_2 \ est\ faible \ \boldsymbol{alors} \ \ la\, puissance\, est \ \ faible$$

$$\mathcal{R}_2: \ \boldsymbol{si} \ \ le\, débit\, d'\, O_2 \ est\ bon \ \boldsymbol{alors} \ \ la\, puissance\, est \ \ haute$$

$$\mathcal{R}_3: \ \boldsymbol{si} \ \ le\, débit\, d'\, O_2 \ est\ haut \ \boldsymbol{alors} \ \ la\, puissance\, est \ \ faible$$

La définition et le sens des termes linguistiques est indiqués par leur fonction d'appartenance ; il n'y a pas de sens universel ou objectif pour les termes linguistiques, du fait de l'imprécision du langage humain les variables linguistiques possèdent toujours des valeurs floues ayant plutôt un sens subjectif.



Exemple de fonctions d'appartenance pour le modèle flou du système de chaudière à gaz

3.2.1 Inférence dans le modèle Linguistique

L'inférence dans les systèmes flous à base de règles est le processus qui consiste à déterminer l'ensemble flou de sortie à partir des règles et des entrées. Le mécanisme d'inférence dans le modèle linguistique est basé sur la règle d'inférence compositionnelle (Zadeh 1973).

Chaque règle peut être vue comme étant une relation floue :

$$\mathcal{R} : X \times Y \ \rightarrow [0,1] \ \ décrite\ par\ \mu_R(x,y) = \mathrm{I}\big(\mu_A(x), \mu_B(y)\big)$$

L'opérateur I performe une implication floue ou un opérateur de conjonction (intersection) sous forme d'une T-norme.

A noter que $\mathrm{I}(.,.)$ est calculé sur tout l'espace cartésien $X \times Y$.

A titre d'exemples on peut citer les types d'opérateurs d'implications floues suivants:

- Implication de Lukasiewicz : $\mu_{A\Rightarrow B}(x,y) = \mathrm{I}\,(\mu_A(x),\mu_B(y)) = \min(1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y))$
- Implication de Kleene-Diene : $\mu_{A\Rightarrow B}(x,y) = \mathrm{I}\,(\mu_A(x),\mu_B(y)) = \max(1-\mu_A(x),\mu_B(y))$

Les Implications floues sont utilisées lorsque les règles sont regardées comme étant une relation d'implication logique classique à savoir que $A_i \rightarrow B_i$, signifie que A_i *implique* B_i veut dire si A_i est vraie alors B_i doit être vraie pour que l'implication soit vraie. Lorsqu'on utilise une conjonction, $A_i \cap B_i$, pour valider une implication, l'interprétation de la règle si…alors devient ' c'est vrai que A_i et B_i se réalisent simultanément'. une conjonction de propositions est équivalente à un T-norme . Un exemple de T-norme est l'opérateur du minimum, souvent appelé 'implication de Mamdani' défini par :

$$\mathrm{I}\,\big(\mu_A(x),\mu_B(y)\big) = \min\big(\mu_A(x),\mu_B(y)\big)$$

Le produit, aussi appelé l'implication de Larsen, défini comme suit :

$$\mathrm{I}\,(\mu_A(x),\mu_B(y)) = \mu_A(x) \times \mu_B(y)$$

Le mécanisme d'inférence ou de déduction est basé sur la règle généralisée modus-ponens qui stipule que c'est souvent (mais pas nécessairement) l'unique règle d'inférence du calcul des propositions, pour le déduire par exemple de $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$:

Implication $\longrightarrow$ $\boldsymbol{si}\ \ x\ est\ A\ \ \boldsymbol{alors}\ \ y\ est\ B$

fait observé $\longrightarrow$ $x\ \ est\ A'$

conséquence $\longrightarrow$ $y\ est\ B'$

Soit donné la règle $(R\ :si\ x\ est\ A\ \ alors\ \ y\ est\ \ B\,)$ et le fait que $(\ x\ est\ \ A'\,)$, alors on peut en déduire l'ensemble flou de sortie B' obtenu par la composition relationnelle $max - Tnorme$:

$$\boldsymbol{B' = A' \circ R}\ ,\quad \circ\ \boldsymbol{opérateur\ de\ composition\ relationnel}$$

Pour la T-norme du minimum, la composition max-min est donnée par :

$$\boldsymbol{\mu_{B'}(y) = \max_{X}\min_{X,Y}\big(\mu_{A'}(x),\mu_R(x,y)\big)}$$

- Exemple de Règle compositionnelle d'Inférence

On considère une règle floue $si\ x\ est\ a\ alors\ y\ est\ B$ avec les ensembles flous A et B suivants :

$$A = \{0/1\,,0.1/2\,,0.4/3\,,0.8/4\,,1/5\}$$

$$B = \{0/-2\,,0.6/-1\,,1/0\,,0.6/1\,,0/2\}$$

En appliquant la T-norme du minimum (implication de Mamdani), la relation R_M qui en découle de la règle floue est calculée ainsi :

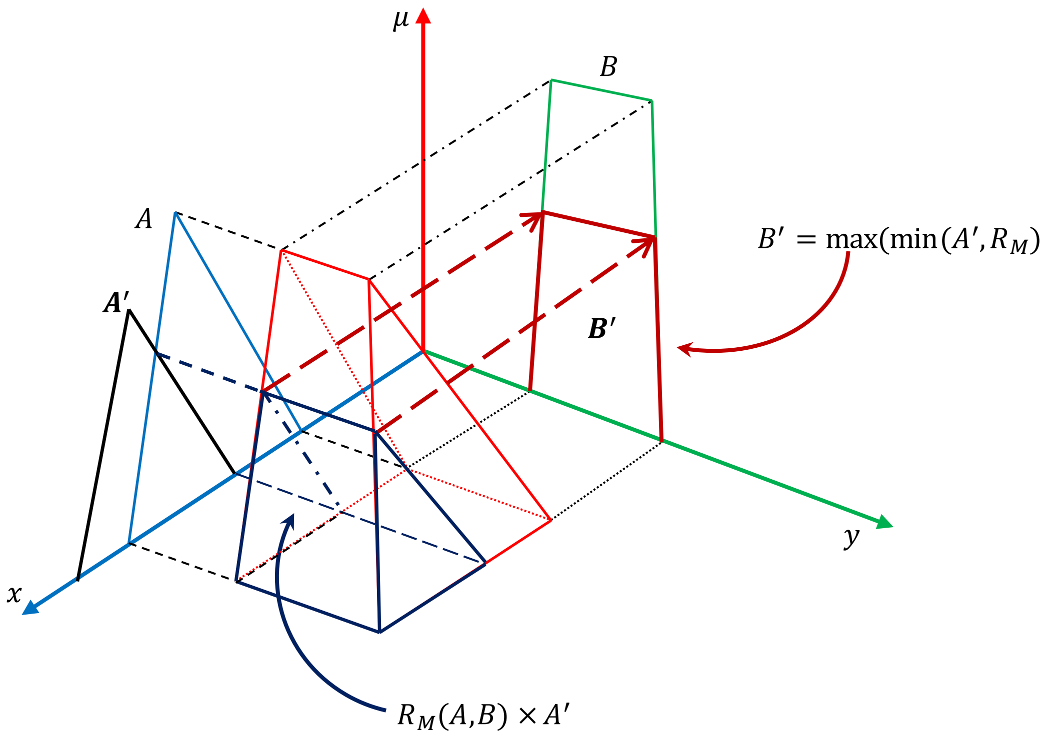
$R_M(x,y)$	-2	-1	0	1	2
1	1	0	0	0	0
2	0	0.1	0.1	0.1	0
3	0	0.4	0.4	0.4	0
4	0	0.6	0.8	0.6	0
5	0	0.6	1	0.6	0

Les lignes de cette matrice relationnelle correspondent aux éléments du domaine de A et les colonnes à ceux de B. Considérons maintenant un ensemble flou A′ comme une nouvelle entrée à cette règle défini par :

$$A' = \{0/1\,,0.2/2\,,0.8/3\,,1/4\,,0.1/5\}$$

Par application de la composition max-min on obtient l'ensemble flou de sortie $B'_M = A' \circ R_M$ qui correspond à l'ensemble flou d'entrée A', $dans\ ce\ cas\ B'\ est\ donné\ par$:

$B' = \{0/-2\,,0.6/-1\,,0.8/0\,,0.6/1\,,0/2\}$



On sait que $\boldsymbol{A \Longrightarrow B} \equiv \boldsymbol{A^c} \vee \boldsymbol{B}$ $avec\; \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \;\; ici \;\; A^c$: $compl\acute{e}mentaire\; de\; A$

$$et\; A \vee B = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \;\; c'est\; le\;\; OU\; flou$$

$$\boldsymbol{l'implication\; floue}\; serait\; donn\acute{e}e\; par:$$

$$\boldsymbol{A \Longrightarrow B \equiv A^c \vee B \Leftrightarrow \mu_{A\Rightarrow B}(x,y) = \mu_{A^c \vee B}(x,y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y))}$$

$$\boldsymbol{R\grave{e}gle\; d'inf\acute{e}rence\; compositionnelle\; de\; Zadeh}$$

$$si\; R\; est\; une\; realtion\; floue\; du\; domaine\; X\; vers\; Y\,,$$

$$et\; A_x\;\; un\; sous-ensemble\; flou\; de\; X$$

$$alors\; le\; sous\; ensemble\; flou\;\; B_y\;, induit\; par\; A_x\;\; , est\; donn\acute{e}\; par\; \boldsymbol{la\; composition}:$$

$$\boldsymbol{B_y = A_x \circ R}$$

La base des règles complète est représentée par l'agrégation ou assemblage des relations R_i de chaque règle individuelle sous forme d'une seule relation floue globale.

- Si les R_i représentent des implications, l'agrégation $R\;\; des\; R_i$ est obtenu par un opérateur d'intersection :

$$\boldsymbol{R = \bigcap_{i=1}^{K} R_i \;\; , c.\grave{a}.d\;\; \mu_R(x,y) = \min_{1\le i\le K} \mu_{R_i}(x,y)}$$

- Si les R_i sont induites par une T-norme, alors R est défini par l'union des relations individuelles R_i :

$$\boldsymbol{R = \bigcup_{i=1}^{K} R_i \;\; , c.\grave{a}.d\;\; \mu_R(x,y) = \max_{1\le i\le K} \mu_{R_i}(x,y)}$$

L'ensemble flou de sortie B' est déterminé (plutôt inféré ou déduit) en utilisant la règle d'inférence compositionnelle (règle de composition des règles), notamment :

3.2.2 Règle d'inférence Max-Min (Mamdani)

$$Base\; de\; r\grave{e}gles\;\; \equiv relation\; floue$$

La sortie d'un modèle flou à base de règles est calculée par l'opération max-min. Supposons une entrée floue $x = A'$, alors la sortie floue a pour valeur B' obtenue par la composition des relations :

$$\mu_{B'}(y) = \max_X [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)]$$

$$c.\grave{a}.d, \qquad \mu_{B'}(y) = \max_X \left\{\mu_{A'}(x) \wedge \max_{1\le i\le K} [\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)]\right\}$$

Comme les opérations max et min sont effectuées sur des domaines différents on peut donc changer leur ordre dans cette expression, ce qui nous permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\mu_{B'}(y) = \max_{1\le i\le K}\left\{\max_{X}[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_i}(x)] \wedge \mu_{B_i}(y)\right\}}$$

$$\text{on pose } \boldsymbol{\beta_i = \max_{X}[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_i}(x)]}$$

$$\text{et que l'on appelle } \boldsymbol{degr\acute{e}\ d'activation\ de\ l'ant\acute{e}c\acute{e}dent\ de\ la\ r\grave{e}gle\ i}$$

L'ensemble flou d sortie du modèle linguistique ainsi défini est :

$$\boldsymbol{\mu_{B'}(y) = \max_{1\le i\le K}[\beta_i \wedge \mu_{B_i}(y)] \quad y \in Y}$$

Algorithme de calcul de l'inférence de Mamdani (max-min) :

1) Calculer le degré d'activation pour chaque règle par :
$$\boldsymbol{\beta_i = \max_{X}[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{A_i}(x)]}\ , 1 \le i \le K$$

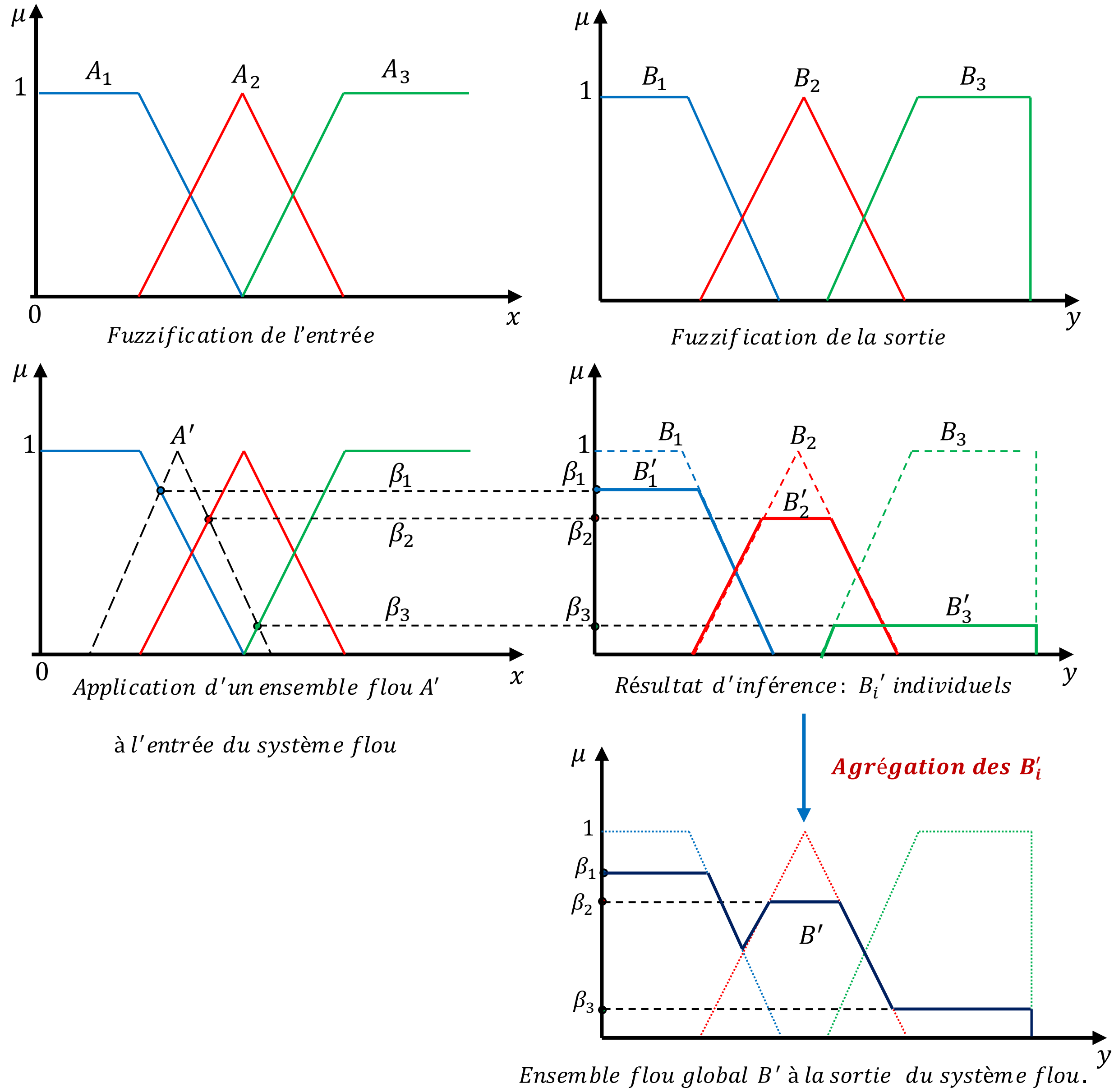
à $noter\ que$:
$pour\ un\ ensemble\ singleton\ (\ \mu_{A'}(x) = 1\ si\ x = x_0\ et\ \ \mu_{A'}(x) = 0\ \ si\ x \neq\ x_0\ )$
$\beta_i\ prend\ la\ valeur\ \mu_{A_i}(x_0) = \beta_i$

2) Déterminer les ensembles flous de sortie $B_i'\ tel\ que$
$$\mu_{B_i}(y) = \ \beta_i \wedge \mu_{B_1}(y)$$
3) Obtenir l'ensemble flou de sortie global B' par agrégation des ensembles flous de sortie partiels B_i' sachant que :
$$\mu_{B'}(y) = \max_{1\le i\le K} \mu_{B_i'}(y)$$

Représentation schématique de l'algorithme d'inférence de Mamdani

$$mod\grave{e}le\ flou: \begin{cases} si\ \ x\ est\ A_1\ \ alors\ \ y\ est\ B_1 \\ si\ \ x\ est\ A_2\ \ alors\ \ y\ est\ B_2 \\ si\ \ x\ est\ A_3\ \ alors\ \ y\ est\ B_3 \end{cases} \quad , c'est\ la\ base\ des\ r\grave{e}gles$$

$$donn\acute{e}es: \quad x\ est\ A' \ \ \rightarrow y\ \ est\ B' \quad (\ voir\ sch\acute{e}ma\ ci-dessous)$$



$$B' \equiv \text{agrégation}\,(B'_i)$$

3.2.3 Défuzzification

Le résultat d'une inférence floue est l'ensemble est l'ensemble flou B'. si une valeur nette (crisp) numérique de sortie est désirée alors l'ensemble flou de sortie doit être défuzzifiée. La défuzzification c'est l'opération qui remplace un ensemble flou par une seule valeur numérique représentative de cet ensemble. Les deux méthodes de défuzzification les plus communément utilisées sont : la méthode du centre de gravité et la méthode de la valeur moyenne des maximums. La défuzzification par calcul du centre de gravité d'un ensemble flou est la plus employée en Automatique.

- **Méthode du centre de gravité**

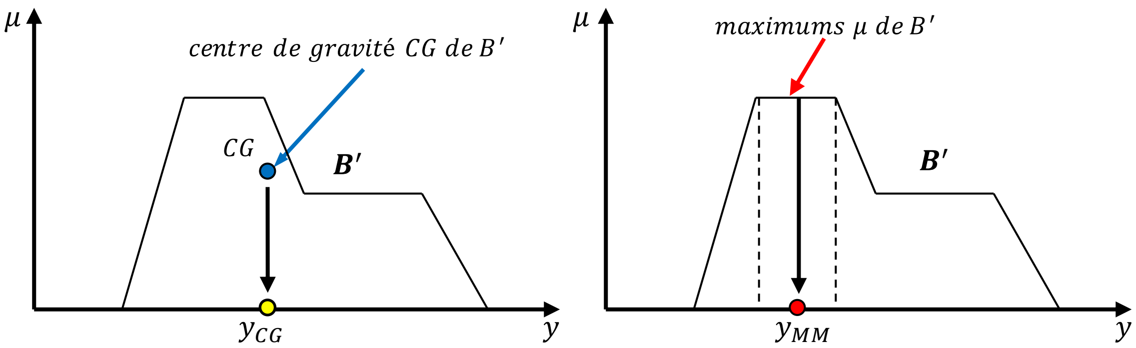
Par cette méthode on calcule numériquement les coordonnées y du centre de gravité de l'ensemble flou B'.

$$y' = y_{CG} = CG\,(B') = \frac{\sum_j \mu_{B'}(y_j) y_j}{\sum_j \mu_{B'}\,(y_j)} \quad ou\; y' = y_{CG} = CG\,(B') = \frac{\int_{B'} \mu_{B'}(y) y\,dy}{\int_{B'} \mu_{B'}(y)\,dy}$$

- **Méthode de la moyenne des maximums**

On calcule les coordonnées de la valeur moyenne de l'intervalle ayant le plus grand degré d'appartenance.

$$y' = y_{MM} = MM(B') = CG\left\{y\; tel\; que\; \mu_{B'}(y) = \max_{y} \mu_{B'}(y)\right\}$$



abscisse du centre de gravité de B' — *moyenne de l'intervalle des maximums de B'*

Par exemple, si on considère l'ensemble flou de sortie B' dans le cas du modèle flou du bruleur à gaz avec $B' = [0.2,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.9,\ 1]$ défini sur le domaine de sortie $Y = [0,\ 25,\ 50,\ 75,\ 100]$, la sortie défuzzifiée est obtenue par la formule du centre de gravité qui donne pour résultat la valeur :

$$y_{CG} = \frac{0.2 \times 0 + 0.2 \times 25 + 0.3 \times 50 + 0.9 \times 75 + 1 \times 100}{0.2 + 0.2 + 0.3 + 0.9 + 1} = 72.12\; Watts$$

La puissance produite par le bruleur à gaz d'après ce modèle flou est donc 72.12 W.

3.3 Modèle Relationnel Flou

Un modèle flou relationnel n'est autre qu'une généralisation du modèle flou linguistique. Un modèle flou relationnel représente toutes les associations entre les variables linguistiques définies sur les domaines d'entrée et de sortie du système en question en utilisant des relations floues où chaque élément de le relation indique le degré d'association entre les différents ensembles flous correspondants.

Soit le modèle flou suivant :

$$\mathcal{R}_i : \; si \;\; x_1 \, est \, A_{i,1} \;\; ET \; \dots \; ET \;\; x_n \, est \, A_{i;n} \;\; alors \;\; y \, est \, B_i \;\; i = 1,2, \dots K$$

$\mathcal{A}_j = \{A_{j,l} / \;\; l = 1,2, \dots N_j\} \quad avec \;\; j = 1,2, \dots n$
représente l'ensemble des valeurs ou termes linguistiques pour la variable d'entrée x_j

ayant pour degré d'appartenance $\mu_{A_{j,l}}(x_j) : X_j \to [0\,,1]$.

$\mathcal{B} = \{B_l / \;\; l = 1,2, \dots M\}$ *ensemble des valeurs linguistiques de la variable* y *(conséquente).*

On rappelle qu'une relation nette classique S entre les termes antécédents A_j et les termes conséquents de $\mathcal{B}$ est donnée par : $S = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B \to \{0\,,\;1\}$

si on pose $\mathcal{A} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ *, alors on peut écrire que :*

$$S : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \{0\,,1\} \;\; prenant \; 0 \; ou \; 1 \; comme \; degré \; de \; vérité \, .$$

Exemple : Représentation relationnelle d'une base de règles à deux variables d'entrées x_1 , x_2 et une variable de sortie y . on définit 2 termes linguistiques par entrée, à savoir :

$$A_1 = \{faible, grand\} \;\; et \;\; A_2 = \{faible, grand\}$$

Pour la sortie on affecte les 3 termes linguistiques suivants:

$$\mathcal{B} = \{lent, moyen, rapide\}$$

Toutes les combinaisons possibles des antécédents nous permettent d'avoir 4 règles au total. On obtient ainsi l'ensemble des règles suivantes pour un modèle donnée :

$$si \;\; x_1 \, est \, faible \;\; et \;\; x_2 \, est \, faible \;\; alors \;\; y \, est \, lent$$

$$si \;\; x_1 \, est \, faible \;\; et \;\; x_2 \, est \, grand \;\; alors \;\; y \, est \, moyen$$

$$si \;\; x_1 \, est \, grand \;\; et \;\; x_2 \, est \, faible \;\; alors \;\; y \, est \, moyen$$

$$si \;\; x_1 \, est \, grand \;\; et \;\; x_2 \, est \, grand \;\; alors \;\; y \, est \, rapide$$

Ce qui est équivalent à une représentation par le tableau de vérité suivant :

x_1	x_2	y lent	 moyen	 rapide
faible	faible	1	0	0
faible	grand	0	1	0
grand	faible	0	1	0
grand	grand	0	0	1
		$\boldsymbol{S : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \{0\,,1\}}$		

Modèle relationnel classique

Un modèle relationnel flou n'est autre qu'un modèle qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0,1] :

$$\mathcal{R}:\ \mathcal{A}\ \times \mathcal{B}\ \rightarrow\ [0\,,1\,]$$

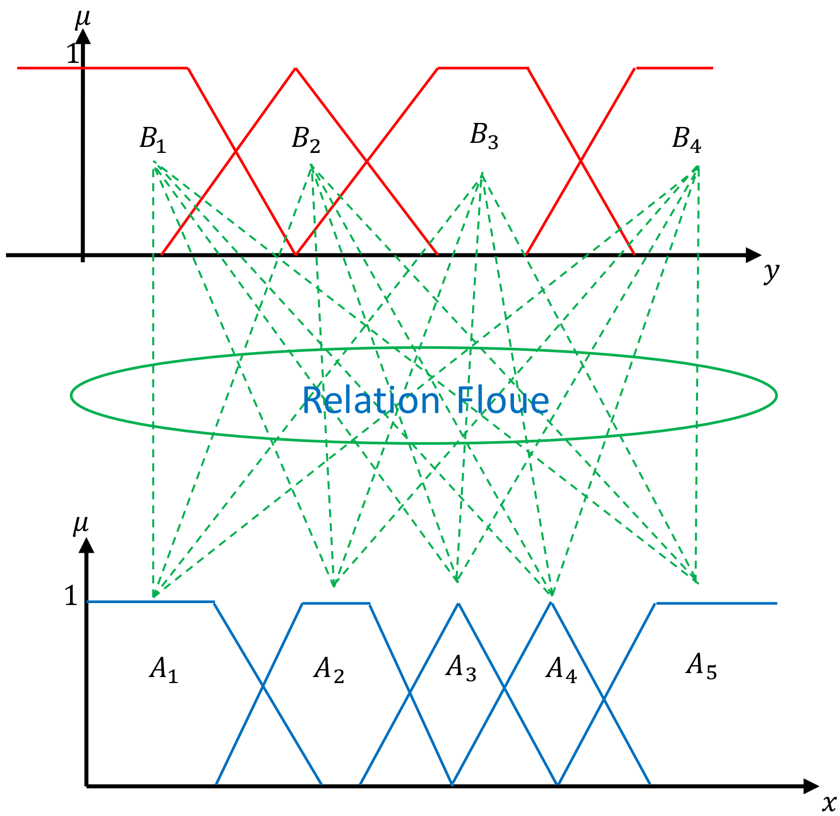
Pour cet exemple, on représente le modèle flou par un tableau du type suivant :

x_1	x_2	y lent	y moyen	y rapide
faible	faible	1	0.5	0.1
faible	grand	0.6	1	0.3
grand	faible	0.5	0.8	0.2
grand	grand	0.1	0.6	1

$$\boldsymbol{S}:\ \boldsymbol{\mathcal{A}}\ \times \boldsymbol{\mathcal{B}}\ \rightarrow\ [\mathbf{0}\,,\mathbf{1}]$$

Modèle relationnel flou

D'une façon générale, un modèle relationnel flou est schématisé par le diagramme suivant :



Modèle Relationnel Flou

Pour illustrer la combinaison de règles floues dans un moteur d'inférence flou on implémente un exemple numérique d'un modèle flou mono-entrée mono-sortie composé de 4 ensembles flous 2 pour l'entrée et 2 pour la sortie $A_1\,, A_2,\ B_1\ et\ B_2,$ respectivement. On va observer les mécanismes d'agrégation et d'inférence, notamment celui de Mamdani et de Larsen.

$$Règles \quad \mathcal{R}_i : \ si \ x_1 \ est \ A_i \quad alors \quad y \ est \ B_j \quad avec \ \ i \ et \ j = 1,2$$

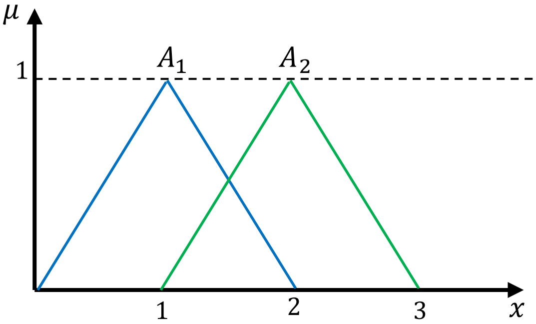
On se donne les fonctions d'appartenance suivantes :

- $pour \ l'entrée \ x :$

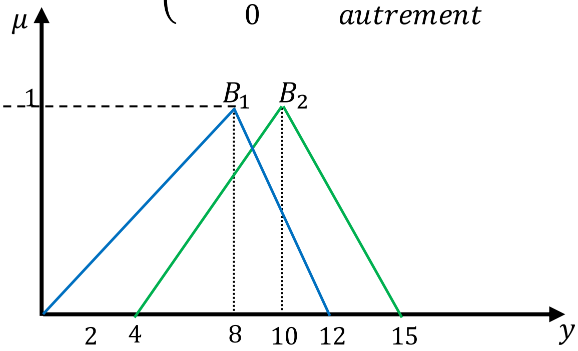
$$A_1(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & si \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & autrement \end{cases} \qquad A_2(x) = \begin{cases} x - 1 & si \ \ 1 \le x \le 2 \\ 3 - x & si \ \ 2 \le x \le 3 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

- $pour \ la \ sortie \ y :$

$$B_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}y & si \quad 0 \le y \le 8 \\ -\frac{1}{4}y + 3 & si \quad 8 \le y \le 12 \\ 0 & autrement \end{cases} \qquad B_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y - \frac{2}{3} & si \ \ 4 \le y \le 10 \\ -\frac{1}{5}y + 3 & si \ \ 10 \le y \le 15 \\ 0 & autrement \end{cases}$$



$graphe \ des \ ensembles \ flous \ A_1 et \ A_2$



$graphe \ des \ ensembles \ flous \ B_1 et \ B_2$

Une règle R_i est activée ou déclenchée en x si $A_i(x) \neq 0$, c.à.d $x \ \in au \ support \ de \ A_i$.

3.3.1 Modèle de Mamdani

Soient les $règles \quad \mathcal{R}_i : \ si \ \ x \ est \ A_i \quad alors \quad y \ est \ B_i \quad avec \ \ i \ = 1,2, \ldots n \ et \ x = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$, le modèle de Mamdani interprète une collections de ces règles par :

$$R(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i(x) \wedge B_i(y))$$

Pour chaque valeur du vecteur d'entrée $x = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ ceci donne en sortie un ensemble flou R_x défini par :

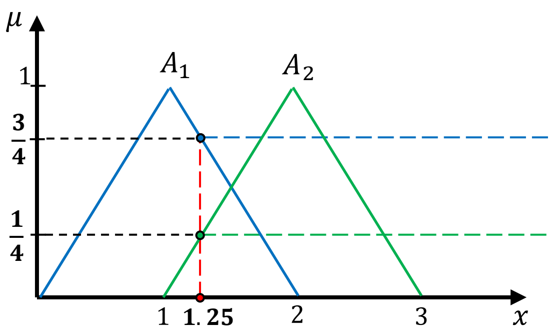
$$R_x(y) = \bigvee_{i=1}^{n} A_i(x) \wedge B_i(y) = \bigvee_{i=1}^{n} R_i$$

$$ici \ on \ pose \quad R_i : \ \ si \ \ A_{i1} \ \ et \ \ A_{i2} \ldots \ldots et \ \ A_{ik} \ \ alors \ \ B_i \ \ , i = 1,2, \ldots n$$

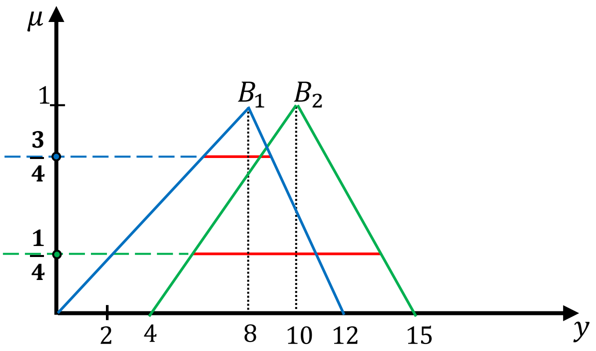
$$on \ en \ déduit \ R_x(y) = R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = \bigvee_{i=1}^{n} (\ A_{i1}(x_1) \ \wedge \ A_{i2}(x_2) \ldots \wedge \ \ A_{ik}(x_k) \ \wedge B_i(y))$$

En commande floue, le nombre $A_i(x) = A_{i1}(x_1) \wedge A_{i2}(x_2) \dots \wedge A_{ik}(x_k)$ est appelé souvent *le degré d'activation de la règle R_i pour l'entrée x*. L'ensemble flou $R_{i,x}(y) = A_i(x) \wedge B_i(y)$ est appelé sortie de commande floue pour la règle R_i *en réponse à l'entrée x de X*, tandis que l'ensemble flou $R_x(y)$ représente la sortie de commande globale (agrégée) suite à x appliquée à l'entrée du contrôleur flou.

Au point $x = 1.25$, les règles de l'exemple $\mathcal{R}_i$: *si x est A_i alors y est B_i*, $i = 1,2$ produisent l'ensemble flou $R_x(y)$:

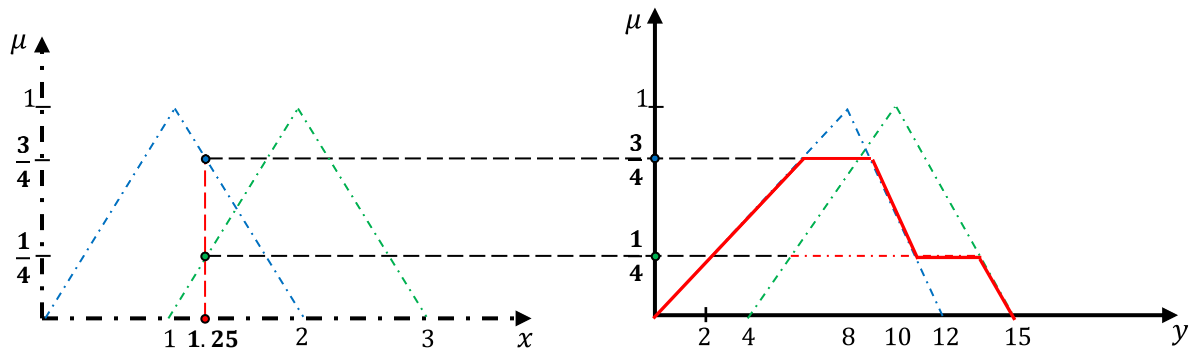


graphe des ensembles flous A_1 et A_2



graphe des ensembles flous B_1 et B_2

$$R_x(y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4} \wedge \frac{1}{8}y\right) & si\ \ 0 \le y \le 4 \\ \left(\frac{3}{4} \wedge \frac{1}{8}y\right) \vee \left(\left(\frac{1}{6}y - \frac{2}{3}\right) \wedge \frac{1}{4}\right) & si\ \ 4 \le y \le 8 \\ \left(\frac{3}{4} \wedge \left(-\frac{1}{4}y + 3\right)\right) \vee \left(\left(\frac{1}{6}y - \frac{2}{3}\right) \wedge \frac{1}{4}\right) & si\ \ 8 \le y \le 10 \\ \left(\frac{3}{4} \wedge \left(-\frac{1}{4}y + 3\right)\right) \vee \left(\left(-\frac{1}{5}y + 3\right) \wedge \frac{1}{4}\right) & si\ \ 10 \le y \le 12 \\ \left(\left(-\frac{1}{5}y + 3\right) \wedge \frac{1}{4}\right) & si\ \ 12 \le y \le 15 \\ 0 & autrement \end{cases}$$



graphe de l'ensemble flou $R_{1.25}(y)$

$$R_{1.25}(y) = [A_1(1.25) \wedge B_1(y)] \vee [A_2(1.25) \wedge B_2(y)]$$

3.3.2 Modèle de Larsen

Soient les $règles \quad \mathcal{R}_i : \; si \;\; x \; est \; A_i \quad alors \quad y \, est \; B_i \;\; avec \;\; i \; = 1,2, \dots n \; et \; x = \{x_1, x_2, \dots x_k\}$, le modèle de Larsen interprète une collections de ces règles par :

$$R(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i(x) \times B_i(y))$$

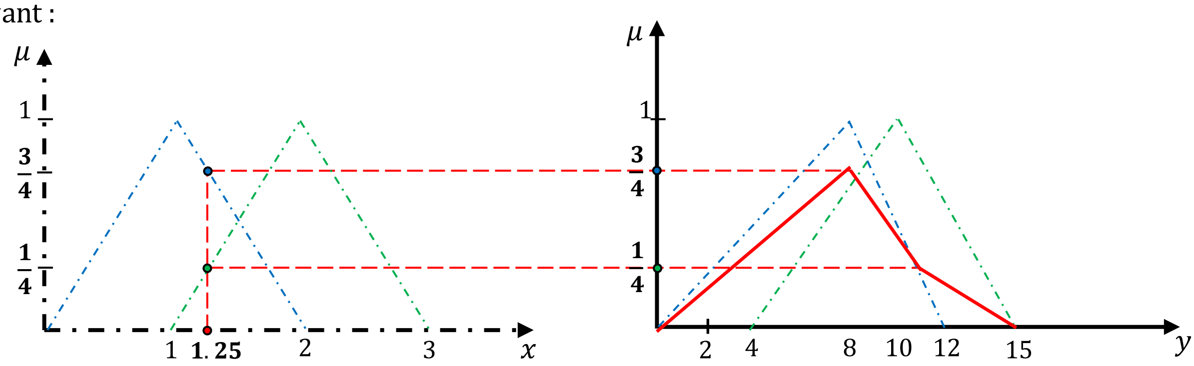
Pour chaque vecteur d'entrée $x = \{x_1, x_2, \dots x_k\}$ on obtient en sortie un ensemble flou R_x défini par :

$$R_x(y) = \bigvee_{i=1}^{n} A_i(x). B_i(y) = \bigvee_{i=1}^{n} R_i$$

Noter que pour une collection de règles $R_i : \;\; si \;\; A_{i1} \;\; et \;\; A_{i2} \dots \dots \dots et \;\; A_{ik} \;\; alors \;\; B_i \;\; , i = 1,2, \dots n$

$$on \; aura \; R_x(y) = R(x_1, x_2, \dots, x_k, y) = \bigvee_{i=1}^{n} (A_{i1}(x_1) \; \wedge \; A_{i2}(x_2) \dots \wedge \; A_{ik}(x_k). B_i(y))$$

AN : pour $x = 1.25$ on obtient l'ensemble flou $R_{1.25}(y)$ du modèle de Larsen dont le graphe est le suivant :



graphe de l'ensemble flou $R_{1.25}(y)$

$$R_{1.25}(y) = [A_1(1.25). B_1(y)] \vee [A_2(1.25). B_2(y)]$$

3.4 Modèle de Takagi-Sugéno

Dans ce modèle, les règles sont écrites sous la forme suivante :

$$R_i : \;\; si \; x_1 \; est \; A_{i1} \;\; et \;\; x_2 \; est \; A_{i2} \dots et \; x_k \; est \; A_{ik} \;\; alors \;\; y = \; f_i(x_1, x_2, \dots x_k) \, , i = 1,2, \dots n$$

Les fonctions $f_1, f_2 \dots f_n$ sont définies sur $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \; \rightarrow \; \mathbb{R} \;\; et \; A_i = \wedge_{j=1}^{k} A_{ij}$. La particularité de ce modèle réside dans le fait que la partie conséquente de la règle n'est plus un ensemble flou mais au contraire elle est modélisée par une fonction analytique usuelle. Pour obtenir la sortie du modèle, on utilise la formule suivante :

$$R(X) = y = \frac{A_1(x). f_1(x) + A_2(x). f_2(x) + \dots + A_n(x). f_n(x)}{A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_n(x)} \; .$$

Ainsi ce modèle produit en sortie directement une fonction réelle, ce qui fait éviter l'étape de défuzzification de la sortie, et par conséquent, simplifie beaucoup l'implémentation du modèle flou d'un système.

- Exemple d'application du modèle de Takagi-Sugéno pour l'interpolation de fonctions

On considère un interpolateur flou à base du modèle de Takagi-Sugéno entre deux fonctions linéaires données par :

$$y = \begin{cases} 3 + 3x & pour\ x \leq -1 \\ -1 + 4x & pour\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

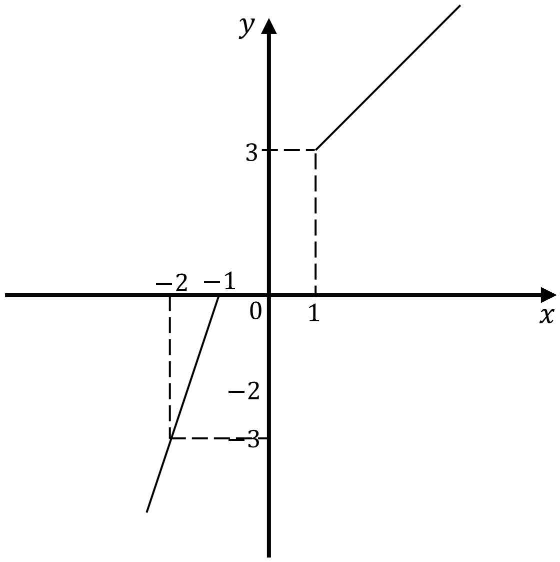
En prenant pour ensembles flous :

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leq -1 \\ \dfrac{1-x}{2} & si\ \ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & si\ \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

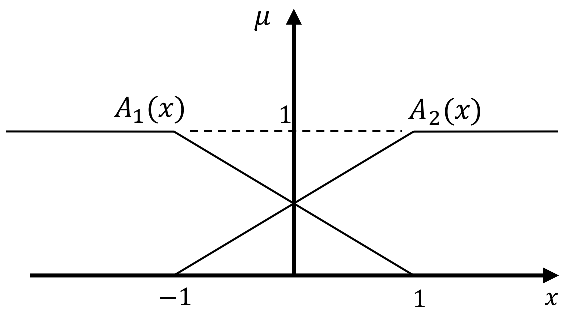
$$et$$

$$A_1(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \leq -1 \\ \dfrac{1+x}{2} & si\ \ -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

Le graphe de y est :



Le graphe des ensembles flous $A_1(x)\ et\ A_2(x)$:



On choisit deux règles floues, notamment :

$$R_1 :\ \ si\ \ x\ \ est\ A_1(x)\quad alors\ \ y = \ f_1(x) = 3 + 3x$$

$$R_2 :\ \ si\ \ x\ \ est\ A_2(x)\quad alors\ \ y = \ f_2(x) = -1 + 4x$$

Ceci nous permet d'écrire donc :

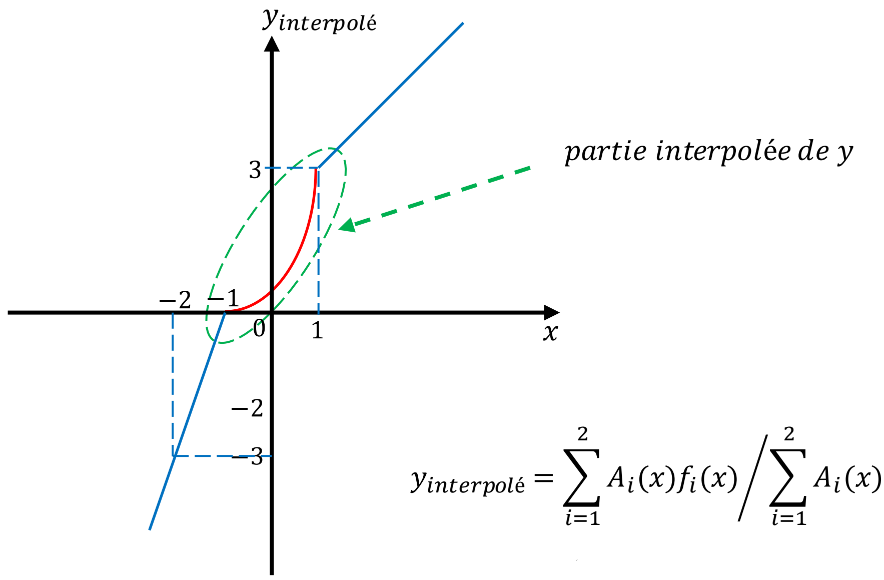
$$y = \frac{A_1(x).f_1(x) + A_2(x).f_2(x)}{A_1(x) + A_2(x)}$$

$$A_1(x).f_1(x) + A_2(x).f_2(x) = \begin{cases} 3 + 3x & si \;\; x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + x^2 & si \; -1 \leq x \leq 1 \\ -1 + 4x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$on\ a\ aussi\ A_1(x) + A_2(x) = 1 \quad \forall x$$

$$d'où\ \ on\ obtient\ finalement: \ y(x) = \begin{cases} 3 + 3x & si \;\; x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + x^2 & si \; -1 \leq x \leq 1 \\ -1 + 4x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Le nouveau graphe de y interpolé est donc :



Ces modèles sont utilisés comme interpolateurs non linéaires entre plusieurs systèmes linéaires. Le résultat est un multi modèle linéaire par morceaux qu'on peut utiliser pour modéliser des systèmes non linéaires. Par conséquent, les lois de commande des systèmes linéaires seront adaptées à un système non linéaire à travers son multi modèle linéaire.

4 Commande Floue des Systèmes Dynamiques

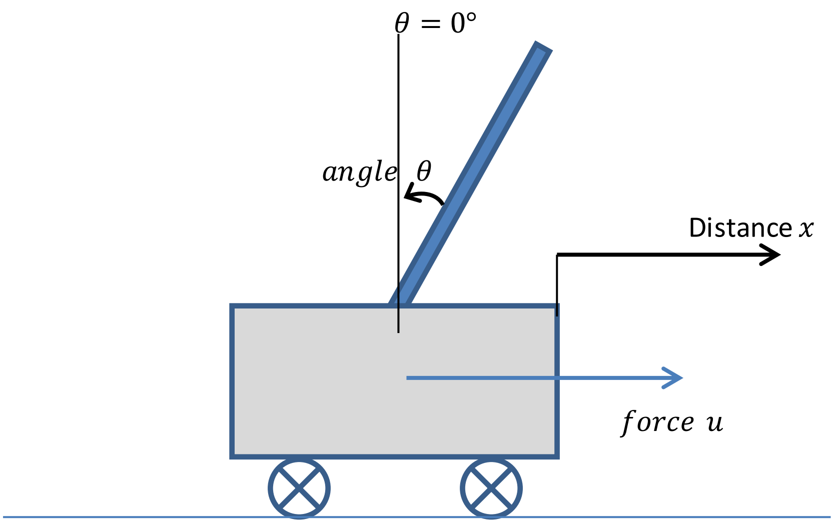
4.1 Introduction

Les contrôleurs flous exécutent la même fonction que celle effectuée par les contrôleurs conventionnels, excepté qu'ils traitent des problèmes de commande complexes à travers des heuristiques et des modèles mathématiques utilisant la logique floue, au contraire des modèles mathématiques basés sur les équations différentielles. Ceci devient très intéressant et utile dans le cas de systèmes non linéaires ou n'ayant pas de modèles formels disponibles. L'implémentation d'une commande floue est dans un sens une imitation des lois de commande adoptées par les humains.

Imitation de l'expertise humaine $\longrightarrow$ Commande floue

4.2 Exemple de l'équilibrage d'un pendule inversé sur chariot

On va étudier le problème de synthèse d'une commande floue pour équilibrer verticalement un pendule inversé attaché à un chariot mobile.il est intéressant de noter que, intuitivement, les humains utilisent uniquement leur bon sens et des lois physiques qualitatives naïves sans connaissance d'aucun modèle mathématique aussi compliqué soit-il pour maintenir le pendule inversé en position verticale avec succès.



$Entrée\ du\ controleur:\ \theta = angle\ du\ pendule\ par\ rapport\ à\ la\ verticale$

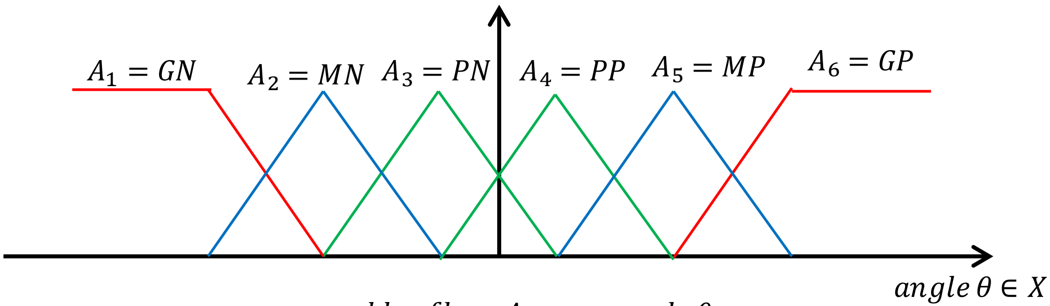
$$\dot{\theta} = vitesse\ angulaire\ du\ pendule$$

$Sortie\ du\ controleur:\ \ signal\ de\ commande\ u\ = force\ appliquée\ au\ chariot$

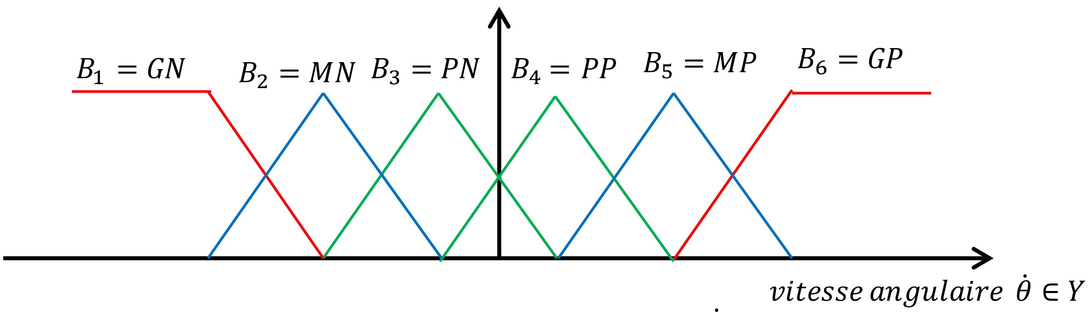
La force de commande doit être choisie en fonction de l'amplitude de l'angle θ et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Pour la synthèse d'une commande floue il est nécessaire de choisir le modèle d'information linguistique, le processus d'inférence, le processus d'agrégation et aussi le processus de défuzzification en l'occurrence. Les valeurs linguistiques sont définies sur des domaines en relation avec l'environnement du système en question ; ici on considère l'espace de manœuvre du chariot et du pendule inversé, notamment, $\theta \in X$, $\dot{\theta} \in Y$ et $u \in U$. On définit comme exemple de valeurs linguistiques pour les variables linguistiques 'angle θ', 'vitesse angulaire $\dot{\theta}$' et 'force u' :

$$grand\ négatif\ (GN), moyen\ négatif\ (MN), petit\ négatif\ (PN)$$

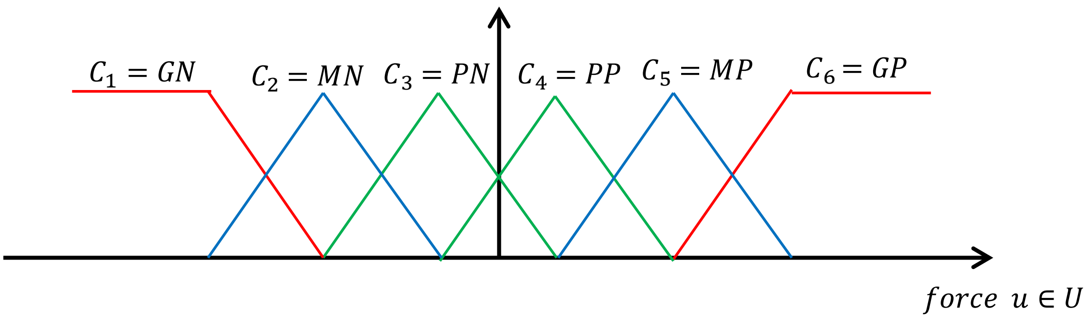
$$grand\ positif\ (GP), moyen\ positif\ (MP), petit\ positif\ (PP)$$



$ensembles\ flous\ A_i\ pour\ angle\ \theta$



$ensembles\ flous\ B_i\ pour\ vitesse\ angulaire\ \dot{\theta}$



$ensembles\ flous\ C_i\ pour\ signal\ de\ commande\ u$

Les règles floues gouvernant ce système prennent ainsi la forme suivante :

1. Si angle est moyen négatif et vitesse est petite positive alors force est petite négative.
2. Si angle est moyen négatif et vitesse est moyenne positive alors force est petite positive.

3. Si angle est petit négatif et vitesse est moyenne positive alors force est petite positive.

...et ainsi de suite.

Les 6 ensembles flous, définis par leurs fonctions d'appartenance, pour chacune des partitions de X et Y respectivement, permettent de construire 36 règles de la forme :

$$R_j : \; si\, \theta\; est\;\; A_j\; et\;\; \dot{\theta}\; est\; B_j\;\; alors\;\;\; u\;\; est\;\; C_j$$

$$où\;\; A_j, B_j\; et\; C_j\; les\; ensembles\; flous\; définis\; sur\; X, Y\; et\; U.$$

On peut rassembler ces 36 règles sous forme compacte à l'aide de la table suivante :

θ \ $\dot{\theta}$	GN	MN	PN	PP	MP	GP
GN	GN	GN	GN	MN	PN	PP
MN	GN	GN	MN	PN	PP	PP
PN	GN	MN	PN	PP	PP	MP
PP	MN	PN	PN	PP	MP	GP
MP	PN	PN	PP	MP	GP	GP
GP	PN	PP	MP	GP	GP	GP

L'entrée $(\theta\,,\;\dot{\theta})$ appliquée à chaque règle R_j produira un ensemble flou de U. Cet ensemble flou est obtenu à travers l'opérateur du minimum comme suit :

$$\varphi_j(u) = min\{A_j(\theta), B_j(\dot{\theta}), C_j(u)\}$$

La fusion des règles, via l'opérateur du maximum, produit un sous ensemble flou de U représentant l'action de commande floue :

$$\psi(u) = max\{\varphi_j(u)\;\;,\quad i = 1,2, \dots, k\}$$

Par exemple, si les mesures donnent $\theta = -8°\; et\; \dot{\theta} = 2°/s$ alors on obtient les valeurs suivantes pour les degrés d'appartenance des ensembles flous activés :

$$A_2(-8) = 0.17$$

$$A_3(-8) = 0.88$$

$$B_4(2) = 0.6$$

$$B_5(2) = 0.82$$

tous les autres A_i et B_i sont nuls pour ce point. Les seules règles pertinentes pour cette entrée sont au nombre de 4 :

$\dot{\theta}$ / θ	MN	PN
PP	PN	PN
MP	PN	PP

En combinant ces 4 règles, on en déduit l'ensemble flou résultant $\psi(u)$ par :

$$\psi(u) = [A_2(-8) \wedge B_4(2) \wedge C_3(u)] \vee [A_2(-8) \wedge B_5(2) \wedge C_3(u)] \vee$$

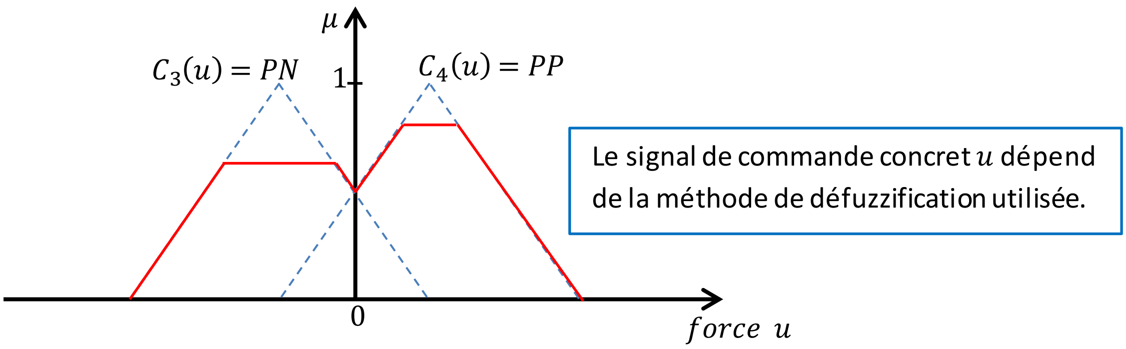
$$\vee [A_3(-8) \wedge B_4(2) \wedge C_3(u)][A_3(-8) \wedge B_5(2) \wedge C_3(u)]$$

$$= [0.17 \wedge 0.6 \wedge C_3(u)] \vee [0.17 \wedge 0.82 \wedge C_3(u)] \vee$$

$$\vee [0.88 \wedge 0.6 \wedge C_3(u)][0.88 \wedge 0.82 \wedge C_3(u)]$$

$$\boldsymbol{\psi(u) = [0.6 \wedge C_3(u)] \vee [0.82 \wedge C_3(u)]}$$

Le graphe de cet ensemble flou est :



le graphe de $\psi(u) = [0.6 \wedge C_3(u)] \vee [0.82 \wedge C_3(u)]$

Pour obtenir une action de commande numérique nette à une entrée $(\theta\,,\ \dot{\theta})$ on utilise une défuzzification de l'ensemble flou de sortie correspondant $\psi(u)$. On emploie souvent la méthode du centre de gravité de l'ensemble flou $\psi(u)$:

$$u^* = \frac{\int u\, \psi(u) du}{\int \psi(u) du}$$

Cette méthodologie de commande, après un certain ajustage suffisant, permettra de réaliser avec succès l'objectif d'équilibrage du pendule inversé. On remarque que les 36 règles floues sont plus que nécessaires et suffisantes ; il y'a des règles redondantes qu'on peut supprimer et réduire, par conséquent, l'espace des règles. Ceci va accélérer le processus d'inférence et générer un contrôleur flou plus rapide. On est arrivé à utiliser 7 règles uniquement pour équilibrer le pendule en ajoutant un ensemble flou supplémentaire '*environ zéro, noté EZ*' aux variables linguistiques.

Les 7 règles utilisées sont données par :

Règles	si θ	et $\dot{\theta}$	alors u
1	EZ	EZ	EZ
2	PP	PP	PP
3	PM	EZ	PM
4	PP	NP	EZ
5	NM	EZ	NM
6	NP	NP	NP
7	NP	PP	EZ

En pratique, un petit nombre de règles est préférable et fonctionne aussi normalement bien qu'un grand nombre. En outre, un nombre réduit de règles possède un avantage important concernant le coût, l'efficacité et la vitesse de calcul.

Principales Approches pour une Commande Floue

Dynamique du système → Base des règles floues (linguistiques)

Synthèse de Commande → Modéliser l'information linguistique
+ Processus d'inférence
+ Processus d'agrégation
+ Méthode de défuzzification

La méthodologie de synthèse d'une commande floue consiste à sélectionner et utiliser :

1. Une collection de règles qui décrivent une stratégie de commande
2. Les fonctions d'appartenance des ensembles flous (valeurs linguistiques)
3. Les connecteurs logiques pour les relations floues
4. La méthode de défuzzification.

Comme résultat, la loi de commande obtenue est la réalisation d'une fonction φ de l'espace d'état X vers l'espace de commande U.

4.3 Modèle du Singleton dans la Commande de Systèmes

C'est un cas spécial du modèle flou linguistique obtenu lorsque la partie conséquence des ensembles flous ce sont des singletons, représentés par des nombres réels produisant des règles de type suivant :

$$R_i : \quad si \;\; X \;\; est \;\; A_i \;\; alors \quad y = b_i$$

Pour le modèle singleton, la défuzzification par le centre de gravité est équivalente à la méthode de la moyenne floue :

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{K} \beta_i \; b_i}{\sum_{i=1}^{K} \beta_i}$$

On peut dire aussi que le modèle flou du singleton est un cas particulier du modèle de Tkagi Sugéno. Ce modèle appartient à la classe plus générale d'approximateurs de fonctions, appelés expansion par fonctions de base :

$$y = \sum_{i=1}^{K} \emptyset_i(X)\ b_i$$

Dans le modèle du singleton, les fonctions de base $\emptyset_i(X)$ sont obtenues par les degrés normalisés d'activation des antécédents des règles et les constantes b_i qui sont les conséquentes.

On obtient une interpolation multi linéaire entre les conséquents si les fonctions d'appartenance de l'antécédent sont des trapèzes qui chevauchent deux à deux et dont leur degré ont pour somme égale à 1 pour chaque élément du domaine.

4.4 Modèle de Takagi-Sugéno dans la Commande de Systèmes

C'est une combinaison de termes linguistiques et régression mathématique. L'ensemble des règles s'écrit sous la forme :

$$R_i : \quad si\ \ X\ \ est\ \ A_i \quad alors \quad y = f_i(X) \qquad i = 1,2, \dots, K$$

On obtient un modèle affine TS lorsque $f_i(X) = a_i^T X + b_i$, où a_i est un vecteur de paramètres, b_i est un offset scalaire . Dans ce cas l'Inférence dans le modèle TS est donnée par

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{K} \beta_i\ y_i}{\sum_{i=1}^{K} \beta_i} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \beta_i\ \left(a_i^T X + b_i\right)}{\sum_{i=1}^{K} \beta_i}$$

a_i et b_i correpondent à une linéarisation locale d'une fonction non linéaire. Le modèle TS peut être vu comme une approximation simple par morceaux de la fonction $y = f(x)$.

4.5 Systèmes dynamiques flous

Le modèle de représentation d'état d'un système dynamique discret est:

$$X(k+1) = f(X(k), u(k))$$

Les différents types de modèles flous peuvent être utilisées pour modéliser la fonction de transition d'état $f(\ .)$. Si l'état du système est parfois non mesurable ou inaccessible alors on emploie le modèle $entrée - sortie$, qui relie directement les sorties du système à ses entrées. C'est un modèle du principe cause-effet régissant un système dynamique. Le plus commun est le modèle $NARX$ ou $NARMAX$ ($nonlinear\ autoregressive\ with\ exogeneous\ input$). La sortie à l'instant $k+1$ est obtenue par l'expression suivante:

$$y(k+1) = f(y(k), y(k-1), \dots, y\left(k - n_y + 1\right), u(k), u(k-1), \dots, u(k - n_u + 1)$$

$$n_y\ et\ n_u\ sont\ reliés\ à\ l'ordre\ du\ système\ dynamique$$

$$\{y(k-1)\}\ et\ \{u(k-1)\}\ ce\ sont\ les\ sorties\ et\ entrées\ du\ modèle.$$

Exemple d'un modèle flou singleton pour un système dynamique composé des règles suivantes :

$$R_i \;:\quad si\; y(k)\; est\; A_{i1}\; et\;\; y(k-1)\; est\; A_{i2}\;\; et \dots et\;\; u(k)\; est\; B_{i1}\; et\;\; u(k-1)\; est\; B_{i2} \dots$$

$$\dots alors\;\; y(k+1)\; est\; C_i$$

Modèles ARX représenté par un modèle dynamique TS

$$R_i \;:\quad si\; y(k)\; est\; A_{i1}\; et\;\; y(k-1)\; est\; A_{i2}\;\; et \dots et\;\; u(k)\; est\; B_{i1}\; et\;\; u(k-1)\; est\; B_{i2} \dots$$

$$\dots alors\;\; y(k+1) = \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij}\; y(k-j+1) + \sum_{j=1}^{n_u} b_{ij}\; u(k-j+1)$$

En dehors de l'utilisation fréquente des systèmes entrée-sortie, les modèles flous sont capables de modéliser des systèmes non linéaires, décrits dans l'espace d'état par :

$$X(k+1) = g\big(X(k), u(k)\big)$$

$$y(k) = h(X(k))$$

L'exemple de représentation à base de règles du modèle TS d'un système régi par un système d'équations d'état est :

$$R_i \;:\quad si\;\; X\; est\;\; A_i\;\; et\;\; u(k)\; est\; B_i\;\; alors\;\; \begin{cases} X(k+1) = A_i\, X(k) + B_i\, u(k) \\ y(k) = C_i\;\; X(k) \end{cases}$$

4.6 Contrôleurs flous

Contrôleurs flous

- **Avec modèle** : équations dynamiques d'un système
- **Sans modèle** : information extraite à partir de l'expérience

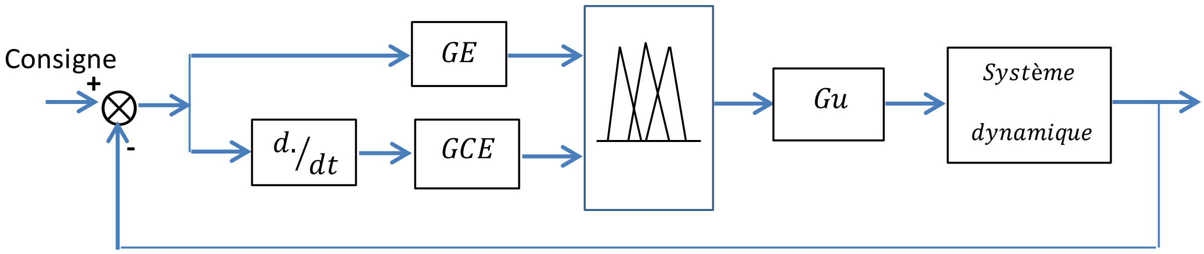
4.6.1 Conception des contrôleurs PID flous (sans modèles)

Idée principale : tout régulateur PID classique peut être remplacé par un régulateur PID flou si le système est BIBO stable (stabilité BIBO veut dire : entrée limitée produit sortie limitée).

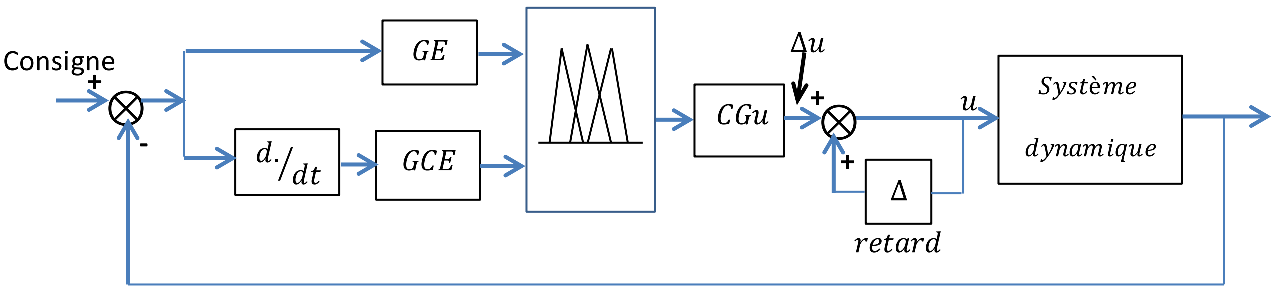
Procédure de synthèse d'un régulateur PID flou

1- Ajuster un régulateur PID (par Ziegler Nichols, …)
2- Construire le régulateur flou équivalent
3- Ajuster le régulateur flou par des heuristiques

Le plus populaire des contrôleurs flous est le contrôleur $e - \Delta e$, c'est un contrôleur flou à deux entrées $e = erreur\ et\ \ \Delta e = variation\ de\ l'erreur$ et une sortie de commande.



Régulateur PD flou



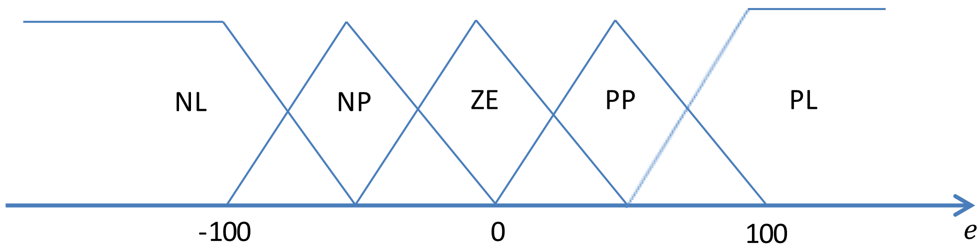
Régulateur PI flou

En considérant 5 ensembles flous typiques, à savoir, NL : négatif large, NP : négatif petit, ZE : zéro, PP : positif petit, PL : positif large, pour chaque entrée du contrôleur et 9 ou 7 ensembles flous pour la sortie (les 5 précédents et plus 4 ou 2 autres, notamment, PM : positif moyen et NM : négatif moyen ; PTL : positif très large et NTL : négatif très large) on obtient la base des règles typique suivante :

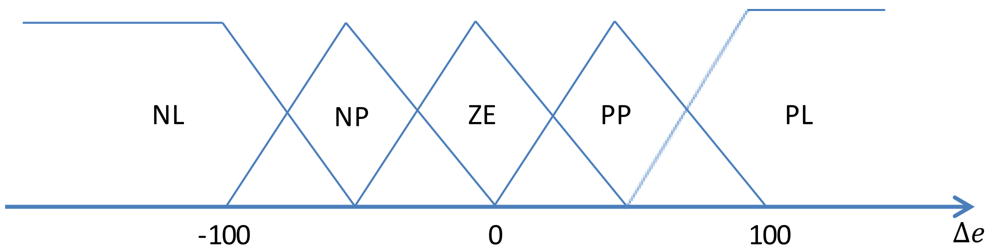
$e \ \backslash \ \Delta e$	NL	NP	ZE	PP	PL
NL	PTL	PL	PM	PP	ZE
NP	PL	PM	PP	ZE	NP
ZE	PM	PP	ZE	NP	NM
PP	PP	ZE	NP	NM	NL
PL	ZE	NP	NM	NL	NTL

$\boldsymbol{u}$

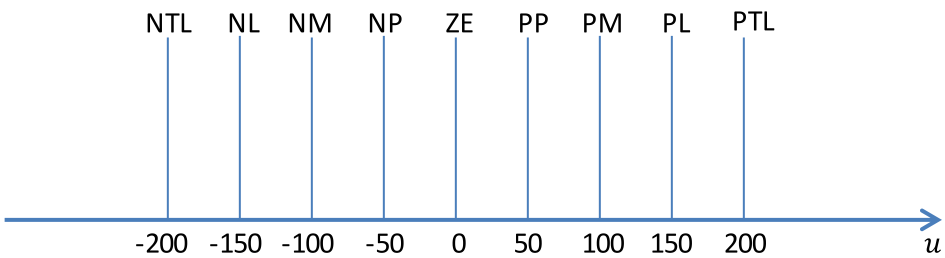
Les fonctions d'appartenance en entrée sont distribuées uniformément sur le domaine du discours des variables d'entrée, voir figure ci-dessous :



$signal\ d'erreur : e$



$variation\ \ de\ l'erreur : \Delta e$



$sortie\ \ u : définie\ par\ des\ singletons$

Il faut remarquer que le domaine des fonctions d'appartenances des ensembles flous est partagé uniformément dans un intervalle de -100 à $+100$ pour l'entrée. Les fonctions d'appartenance de la sortie sont normalisées entre $-200\ et\ +200$ et sont décrites par des singletons, ce qui simplifiera énormément les calculs d'inférence. En utilisant cette base de règles et des fonctions triangulaires uniformément distribuées avec un chevauchement de 0.5, un contrôleur flou parfaitement équivalent à un régulateur PI ou PD peut être construit et l'ajustage des paramètres est initialement effectué par les facteurs ou gains de mise à l'échelle à l'entrée et la sortie du contrôleur. Une méthode très sure pour ajuster le contrôleur flou est tout d'abord commencer par un régulateur PI ou PD stabilisant puis le remplacer par son équivalent version floue, ensuite on ajuste les paramètres des fonctions d'appartenance afin d'améliorer les performances du contrôleur.

Procédure de synthèse :

- Pour remplacer un contrôleur PD décrit par la fonction de transfert :

$$H(p) = K_p(1 + \tau_d p)$$

Les facteurs de mise à l'échelle doivent satisfaire les conditions sur les gains suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c} GE \times GU = K_p \\ GCE \times GU = K_p \tau_d \\ GE \times \max|e| \leq 100 \;\; (bande\,proportionnelle) \\ GCE \times \max|\Delta e| \leq 100 \;\; (bande\,proportionnelle) \end{array}}$$

- Pour remplacer un contrôleur PI décrit par la fonction de transfert :

$$H(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right)$$

Les conditions suivantes sur les gains doivent être vérifiées :

$$\boxed{\begin{array}{c} GCE \times GCU = K_p \\ GE \times GCU = K_p/\tau_i \\ GE \times \max|e| \leq 100 \;\; (bande\,proportionnelle) \\ GCE \times \max|\Delta e| \leq 100 \;\; (bande\,proportionnelle) \end{array}}$$

On observe que, dans les deux cas, les 2 premières conditions garantissent l'application des mêmes gains du contrôleur. Les 2 dernières conditions permettent d'éviter la saturation des efforts du contrôleur.

La conception d'un régulateur PID flou est conduite de différentes façons. On peut indiquer deux principales approches pour synthétiser un tel contrôleur :

Méthode 1 :

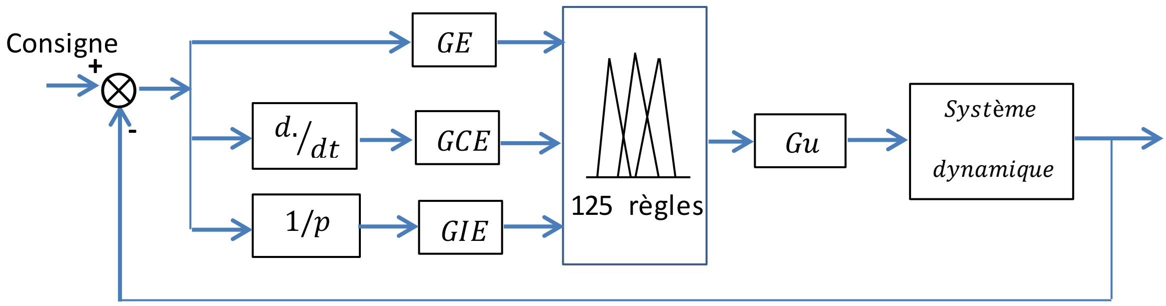
Construire un contrôleur flou à 3 entrées correspondant aux 3 actions P, I et D :

- $erreur\ e$: $action\ proportionnelle$
- Δe : $action\ dérivée$
- $\sum e$: $action\ intégrale\ (somme\ des\ erreurs)$

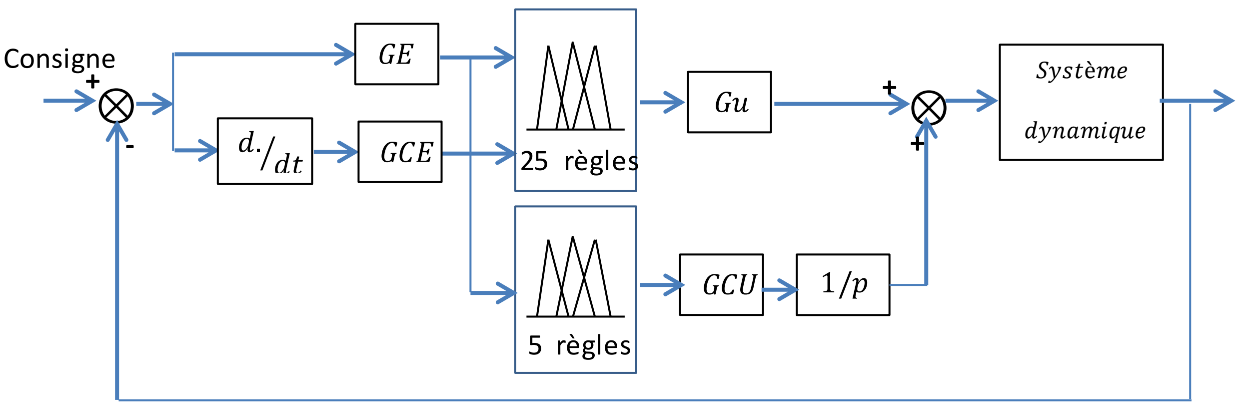
Inconvénient : le nombre de règles va augmenter beaucoup et au lieu d'avoir 25 règles (5 ensembles flous pour chacune des 2 entrées ($e, \Delta e$)), un tel contrôleur va avoir 125 règles rendant très difficile la phase d'ajustage ou sa mise au point.

Méthode 2 :

Une solution plus efficace consiste à diviser le contrôleur PID en 2 sous-contrôleurs, un régulateur PD et un autre assurant l'action intégrale séparément. Ce qui réduira le nombre de règles à 30 seulement.



Régulateur PID flou



Régulateur PD + I flou

Résumé : les régulateurs flous sont conçus en tant que copies exactes des régulateurs PID classiques. Cette approche initiale garantit une migration douce et souple des PID linéaires vers les PID non linéaires. En outre, on peut améliorer encore les performances de réglage par un choix approprié des paramètres des nouveaux degrés de liberté apportés par le régulateur flou.

4.6.2 Commande floue avec Modèle

Les 3 types de méthodes les plus utilisées pour construire des contrôleurs flous tenant compte du modèle du système à contrôler sont :

- ✓ **Méthodes adaptatives** : ⟶ techniques d'optimisation des paramètres du contrôleur flou à partir du modèle du système et une phase de simulations intensives.
- ✓ **Synthèse Directe** : ⟶ utilise l'information fournie par les paramètres du modèle ou les propriétés du modèle pour concevoir le contrôleur flou.
- ✓ **Optimisation en ligne** : ⟶ basée sur un modèle flou permettant de prédire le comportement futur du système sur un horizon fini et calculer les actions futures du contrôleur.

- **Méthodes Adaptatives**

Fondement ⟶ Construction du modèle inverse d'un système afin que le contrôleur puisse générer un signal de commande capable de transférer l'état du système à l'instant courant x_k vers un état désiré x_{k+n}^d .

Pour une dynamique du système donnée par : $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$

à l'instant $k + N$ on a : $x_{k+N} = \underbrace{f(f(f(x_k, u_k), u_{k+1}), \dots, u_{k+N-1})}_{N\ \ fois}$

équivalente à : $x_{k+N} = F(x_k, U)$, $F : composition\ multiple\ de\ f$

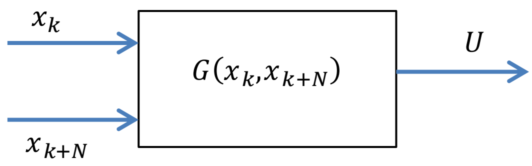
$U : séquence\ de\ commande\ \{u_k, \dots, u_{k+N-1}\}$

En supposant que la fonction F soit inversible, une application inverse du système peut être construite comme :

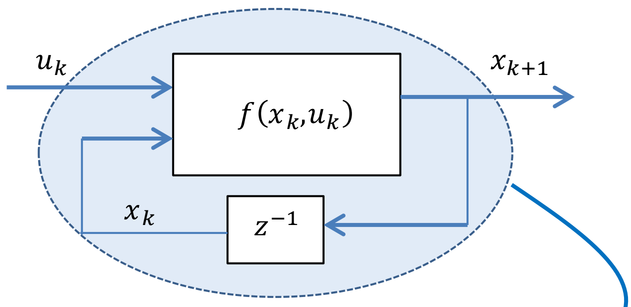
$U = G(x_k, x_{k+N})$

Cette fonction va générer une séquence de commande U ramenant l'état du système x_k vers l'état x_{k+N} en N échantillons ou itérations.

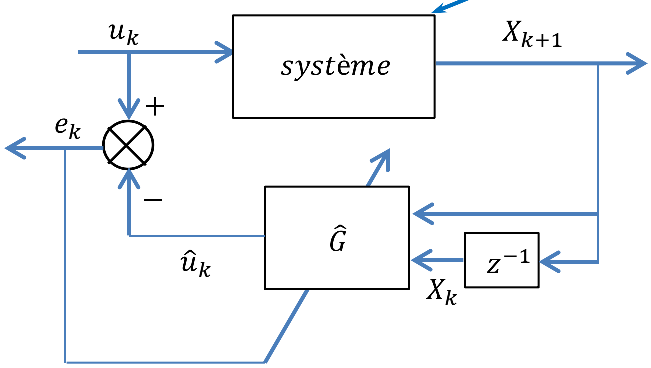
Un système flou $\hat{G}$ est utilisé pour modéliser ou représenter G.



Modèle dynamique Inverse

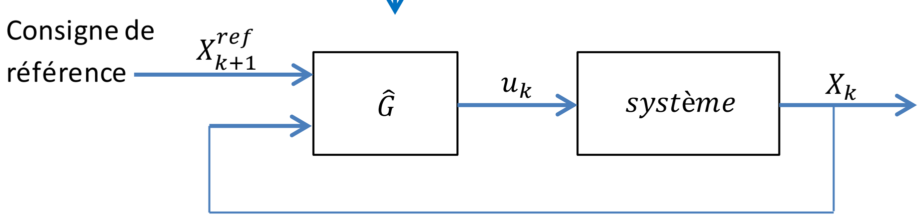


Modèle dynamique du système



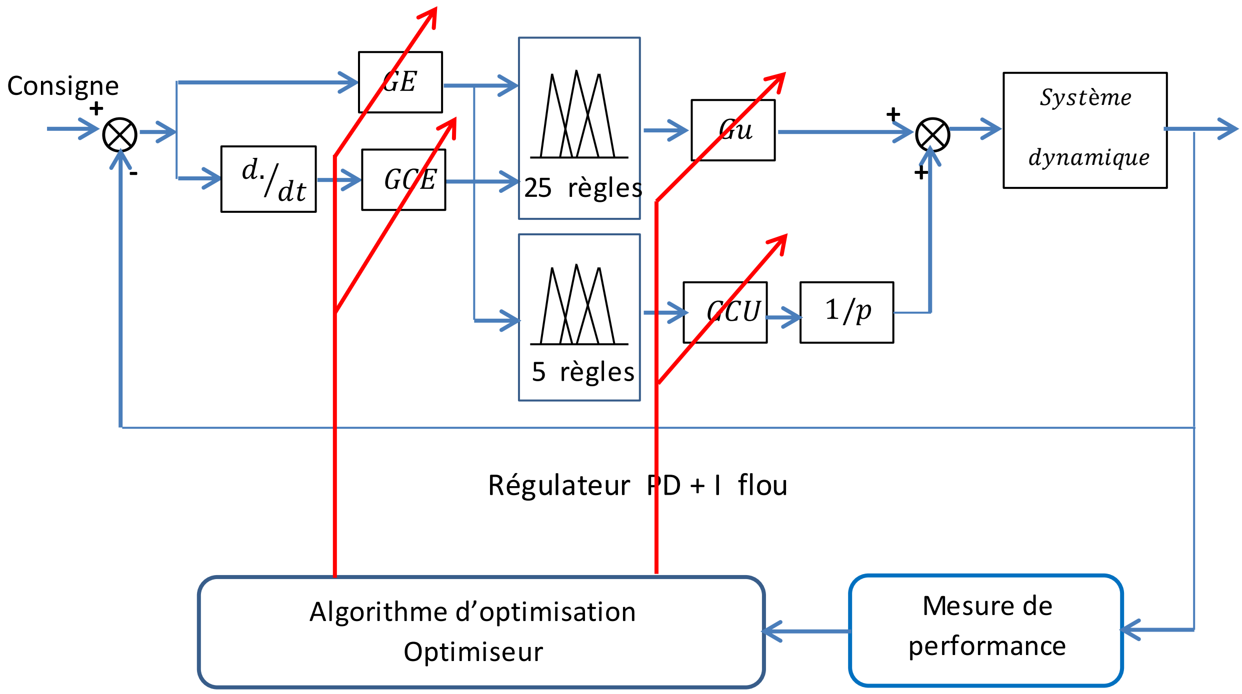
Phase d'apprentissage du modèle inverse $\hat{G}$

Insertion du modèle inverse optimisé pour l'exécution de la commande.

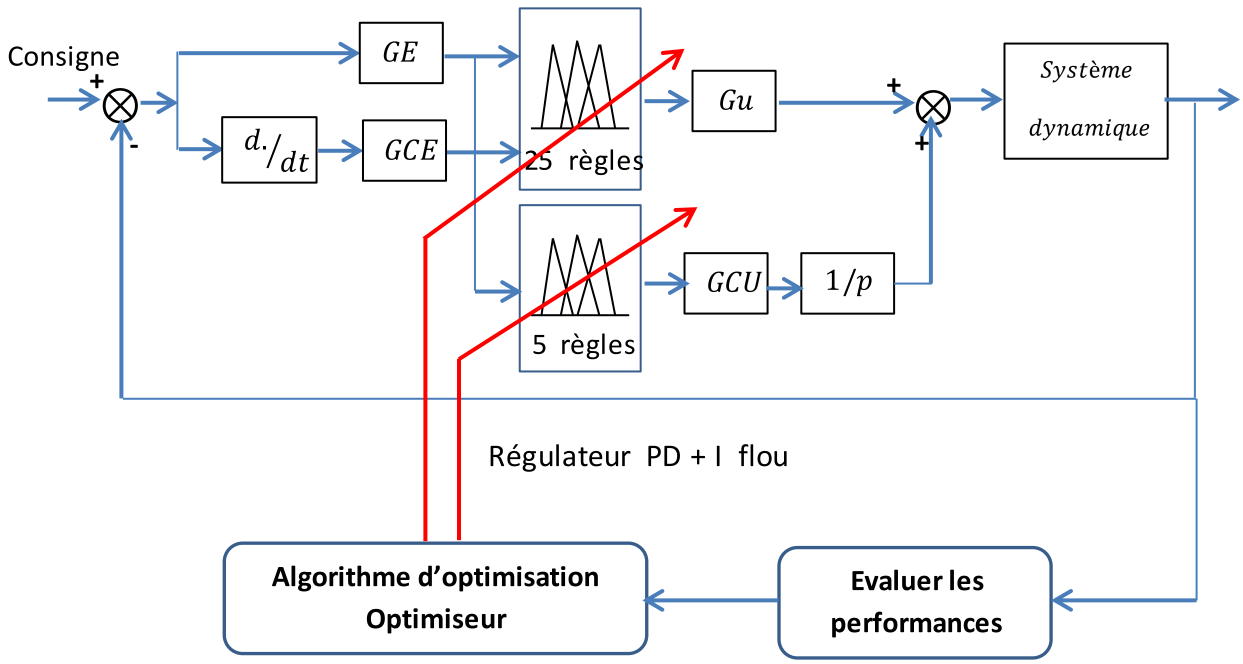


Phase d'opération de la commande par modèle inverse

D'autres schémas de commandes adaptatives floues permettent de construire directement des régulateurs flous optimaux par un apprentissage d'optimisation en ligne des différents paramètres.



Ajustage des constantes des gains par Optimisation non linéaire



Ajustage des paramètres internes du contrôleur flou
(fonctions d'appartenances, conséquences…)

4.7 Commande des Systèmes non linéaires par Modèle Inverse

Cette partie adresse le problème de conception d'un contrôleur flou non linéaire en utilisant le modèle flou du processus à contrôler. L'une des approches la plus simple à base de modèles pour construire un contrôleur adapté à un système non linéaire est l'approche dite commande par modèle inverse. Ceci convient à une classe de systèmes qui sont stables en boucle ouverte (ou stabilisable par contre réaction) et dont le modèle inverse est aussi stable, ce qui veut dire que le système ne présente aucun comportement à phase non minimale. Par simplicité, on aborde le problème sur des systèmes mono entrée mono-sortie (SISO single-input /single-output, en anglais).

On considère un modèle non linéaire d'expression générale :

$$y(k+1) = f\big(x(k), u(k)\big)$$

Les entrées du modèle flou sont l'état actuel donné par le vecteur d'entrée suivant :

$$X(k) = \big[y(k), \ldots, y\big(k - n_y + 1\big), u(k-1), \ldots, u(k - n_u + 1\big]$$

et l'entrée de commande à l'instant présent $u(k)$. Le modèle produira, par prédiction, la sortie du système à l'instant $(k+1)$, $y(k+1)$. La fonction $f(.)$ est une application non linéaire du modèle flou.

Objectif de la commande inverse :

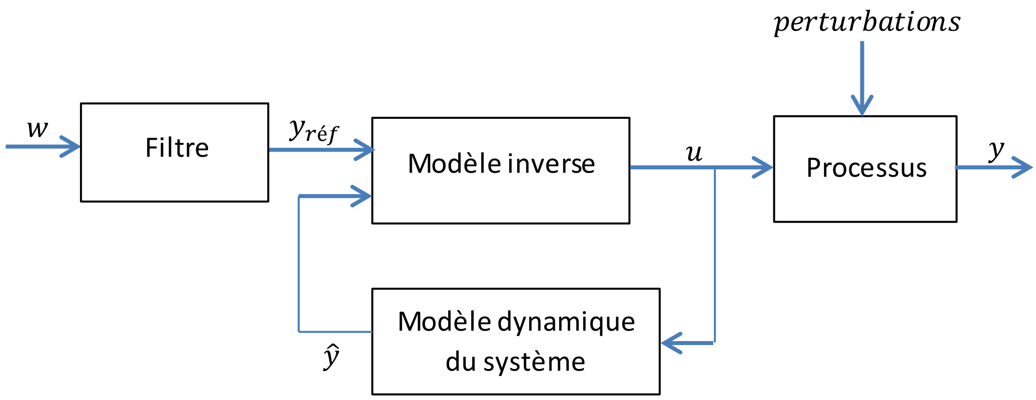
C'est de calculer le signal de commande $u(k)$ à partir du vecteur d'état $X(k)$ afin que la sortie du système à l'instant $(k+1)$ soit égale à une sortie de référence $y_{réf}(k+1)$. Pour que cela soit possible il faut que le modèle du système soit inversible, c.à.d. qu'on ait :

$$u(k) = f^{-1}\Big(X(k), y_{réf}(k+1)\Big), \text{où } a \text{ substitué } y_{réf}(k+1) \text{ pour la sortie } y(k+1).$$

Le modèle inverse peut être appliqué comme contrôleur en boucle ouverte directe ou en tant que contrôleur en boucle ouverte avec retour (Open-loop feedforward controller or open-loop controller with feedback). La différence entre les 2 types de contrôleurs est basée sur la façon dont le vecteur d'état est mis à jour.

4.7.1 Commande Directe en boucle ouverte

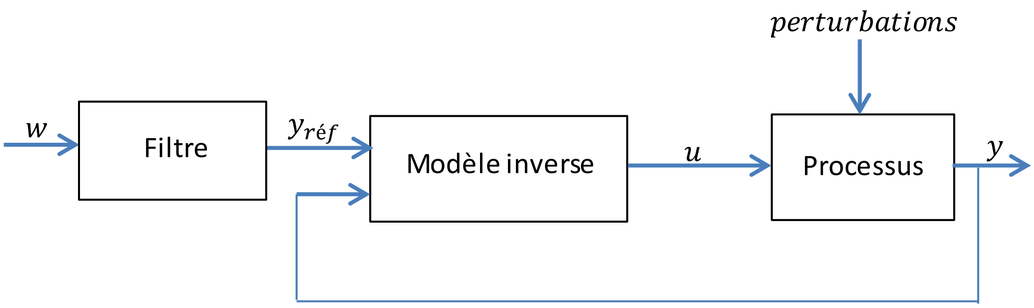
L'état $X(k)$ du modèle inverse est mis à jour en utilisant la sortie du modèle. Puisqu'il n'y a pas de contre-réaction ou retour de la sortie du système/processus, l'existence d'une commande stable est garantie pour les systèmes stables en boucle ouverte et à phase minimale. De plus, dans cette approche on ajoute un filtre de mise en forme de la référence. Souvent c'est un filtre d'ordre 1 ou 2 ayant pour rôle la génération d'un signal de référence à dynamique désirée pour éviter l'apparition de pics dans le signal de commande de type échelon.



Commande Inverse Directe en Boucle-ouverte

4.7.2 Commande Inverse en Boucle –ouverte avec Retour

L'entrée du modèle inverse est mise à jour en utilisant directement la sortie du système dynamique. En fait, le contrôleur fonctionne en boucle-ouverte (il n'utilise pas de signal d'erreur entre le signal de référence et la sortie du système), mais la sortie du système, à l'instant présent, $y(k)$ est utilisé à chaque instant d'échantillonnage pour mettre à jour l'état $X(k)$ interne du controleur. Ceci peut améliorer la prédiction d'éliminer les offsets. Par conter, la présence de bruit ou une mauvaise équivalence entre le système et son modèle peuvent induire un comportement indésirable et causer des oscillations fortes néfastes ou des instabilités dangereuses.



Commande Inverse en Boucle-ouverte avec Feedback

- **Calcul du Modèle Inverse**

Généralement, il est difficile de trouver la fonction inverse f^{-1} de façon analytique. Néanmoins, on peut toujours trouver une approximation en employant des méthodes d'optimisation numériques. En définissant une fonction à optimiser par :

$$J(u(k)) = \left[y_{réf}(k+1) - f(X(k), u(k))\right]^2$$

La minimisation de J par rapport à $u(k)$ donne le signal de commande qui correspond à la fonction inverse. Un large éventail de techniques d'optimisation numériques sont disponibles mais leurs inconvénients : complexité de calcul en temps réel. Recours aux méthodes de modèles flous ou neuronal peut remédier à ces défauts de l'inversion directe ou par optimisation numérique.

Par exemple, pour un système mono-entrée /mono-sortie on peut utiliser un modèle de Takagi-Sugéno pour une entrée affine et ou modèle singleton à fonctions d'appartenance triangulaires.

- **Modèle de Takagi-Sugéno (TS-Affine)**

On considère le modèle entrée-sortie flou TS suivant :

$$R_i \;:\quad si\; y(k)\; est\; A_{i1}\; et \dots et\; y\big(k-n_y+1\big)\; est\; A_{in_y} et\;\; u(k-1)\; est\; B_{i2}\; et \dots$$

$$\dots et\; u(k-n_u+1)\; est\; B_{in_u}$$

$$alors\;\; y_i(k+1) = \sum_{j=1}^{n_y} a_{ij}\; y(k-j+1) + \sum_{j=1}^{n_u} b_{ij}\; u(k-j+1) + c_i$$

$$\text{où } i = 1, \dots, K \;\; indice\; des\; règles, A_{il}\; et\; B_{il}\; ce\; sont\; des\; ens.flous,$$
$$a_{ij}, b_{ij}\; et\; c_i\; sont\; des\; paramètres.$$

$On\; note\; comme\; vecteur\; d'état$:

$$X(k) = \big[y(k), y(k-1), \dots y\big(k-n_y+1\big), u(k-1), \dots u(k-n_u+1)\big]$$

La sortie y(k+1) du modèle est calculée par la formule de la moyenne pondérée :

$$y(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{K} \beta_i\; \big(X(k)\big) y_i(k+1)}{\sum_{i=1}^{K}\; \beta_i\big(X(k)\big)} \qquad avec\; \beta_i\; les\; degrés\; d'activation\; des\; antécédents\; i :$$

$$\beta_i\big(X(k)\big) = \mu_{A_{i1}}\big(y(k)\big) \wedge \dots \mu_{A_{in_y}}\Big(y\big(k-n_y+1\big)\Big) \wedge \mu_{B_{i1}}\big(u(k-1)\big) \wedge \dots$$
$$\wedge\, \mu_{B_{in_u}}\big(u(k-n_u+1)\big)$$

La partie des prémisses ne contiennent pas de terme en u(k), donc le modèle de la sortie y(k+1) est affine en entrée . On définit le degré d'activation normalisée comme suit :

$$\lambda_i\big(X(k)\big) = \frac{\beta_i(X(k))}{\sum_{j=1}^{K} \beta_i(X(k))}$$

D'où on peut écrire :

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i\big(X(k)\big)\left[\sum_{j=1}^{n_y} a_{ij}\; y(k-j+1) + \sum_{j=1}^{n_u} b_{ij}\; u(k-j+1) + c_i\right] + \sum_{i=1}^{K} \lambda_i\big(X(k)\big) b_{i1} u(k)$$

Ceci représente l'expression d'un système non linéaire affine à l'entrée de forme générale :

$$y(k+1) = g\big(X(k)\big) + h\big(X(k)\big)u(k)$$

Le but de la commande est que la sortie du modèle à l'instant $(k+1)$ soit égale au signal de référence $y(k+1) = y_{ref}(k+1)$, le signal de commande $u(k)$ correspondant est tout simplement obtenu par :

$$u(k) = \frac{y_{ref}(k+1) - g(X(k))}{h(X(k))}$$

Par conséquent, on déduit la loi de commande inverse suivante :

$$u(k) = \frac{y_{ref}(k+1) - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i\big(X(k)\big)\left[\sum_{j=1}^{n_y} a_{ij}\ y(k-j+1) + \sum_{j=1}^{n_u} b_{ij}\ u(k-j+1) + c_i\right]}{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i\big(X(k)\big) b_{i1}}$$

- **Modèle Inverse Singleton**

On considère un modèle flou à singleton pour un système mono-entrée/mono-sortie. Les règles floues qui lui sont associées prennent la forme suivante :

$$si\ y(k)\ est\ A_1\ et\ \dots et\ y\big(k-n_y+1\big)\ est\ A_{n_y} et\ \ u(k)\ est\ B_1\ et \dots$$

$$\dots et\ u(k-n_u+1)\ est\ B_{n_u}\ \ alors\ \ y(k+1) = c$$

$$avec\ A_1, \dots, A_{n_y}, B_1 \dots B_{n_u}\ des\ ens.flous\ et\ c\ un\ singleton\ (une\ constante)$$

On forme le vecteur d'état $x(k)$ contenant les $(n_u - 1)$ entrées précédentes et $(n_y - 1)$ sorties précédentes et la sortie actuelle $y(k)$. On construit l'espace d'état flou X composé des ens. flous correspondants selon une T-norme appliquée sur le produit cartésien des variables d'états ainsi définies :

$$X = A_1 \times \dots \times A_{n_y} \times B_2 \times \dots \times B_{n_u}$$

Pour simplifier la notation, on substitue B pour B_1. Ce qui nous permet d'exprimer la règle suivante :

$$si\ x(k)\ est\ \ X\ et\ u(k) est\ B\ alors\ y(k+1)\ est\ c\ .$$

Pour M ensembles flous Xi définis sur l'état x(k) et N ensembles flous Bj définis pour l'entrée u(k) on obtient une base des règles totale composée de K=MN règles individuelles. On peut représenter cette base des règles par la table suivante :

$x(k)$	$u(k)$			
	B_1	B_2	....	B_N
X_1	C_{11}	C_{12}	....	C_{1N}
X_2	C_{21}	C_{22}	....	C_{2N}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
X_M	C_{M1}	C_{M2}	....	C_{MN}

En appliquant l'opérateur de T-norme du type Produit on détermine alors le degré d'activation $\beta_{ij}(k)$ à l'instant k de la prémisse d'une règle d'indice ij par :

$$\beta_{ij}(k) = \mu_{X_i}\big(x(k)\big).\mu_{B_j}\big(u(k)\big)$$

La sortie du modèle, $y(k+1)$, est obtenue en calculant la moyenne des c_{ij} pondérés par les degrés d'activation β_{ij} :

$$y(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}(k).c_{ij}}{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}(k)}$$

$$y(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \mu_{X_i}\big(x(k)\big).\mu_{B_j}\big(u(k)\big).c_{ij}}{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \mu_{X_i}\big(x(k)\big).\mu_{B_j}\big(u(k)\big)}$$

- Exemple : on considère le cas d'un modèle flou ayant pour expression l'équation suivante :

$$y(k+1) = f\big(y(k), y(k-1), u(k)\big)$$

On définit 2 ensembles flous de termes linguistiques {bas, haut} pour $y(k)$ *et* $y(k-1)$, 3 termes linguistiques {petit, moyen, large} pour $u(k)$. La base des règles complète est composée de $2 \times 2 \times 3 = 12$ *règles* de la forme :

$$\boldsymbol{si}\ y(k)\ est\ bas\ \ \boldsymbol{et}\ \ y(k-1)\ est\ bas\ \ \boldsymbol{et}\ \ u(k)\ est\ petit\ \ \boldsymbol{alors}\ \ y(k+1) est\ c_{11}$$

$$\boldsymbol{si}\ y(k)\ est\ bas\ \ \boldsymbol{et}\ \ y(k-1)\ est\ bas\ \ \boldsymbol{et}\ \ u(k)\ est\ moyen\ \ \boldsymbol{alors}\ \ y(k+1) est\ c_{12}$$

$$\ldots\ et\ ainsi\ de\ suite\ jusqu'\text{à}\ la\ r\text{è}gle,$$

$$\boldsymbol{si}\ y(k)\ est\ haut\ \ \boldsymbol{et}\ \ y(k-1)\ est\ haut\ \ \boldsymbol{et}\ \ u(k)\ est\ large\ \ \boldsymbol{alors}\ \ y(k+1) est\ c_{43}$$

Dans cet exemple, on a les définitions suivantes :

$x(k) = [y(k),\ y(k-1)],\ X_i \in \{(bas \times bas), (bas \times haut), (haut \times bas), (haut \times haut)\}$, $et\ U = \{petit, moyen, large\}\ \rightarrow M = 4\ et\ N = 3.$

La base des règles est codée par la table suivante :

$x(k)$	$u(k)$ petit	$u(k)$ moyen	$u(k)$ large
X_1 (bas×bas)	C_{11}	C_{12}	C_{13}
X_2 (bas×haut)	C_{21}	C_{22}	C_{23}
X_3 (haut×bas)	C_{31}	C_{32}	C_{33}
X_4 (haut×haut)	C_{41}	C_{42}	C_{43}

- La méthode d'inversion exige des fonctions d'appartenance des prémisses $\mu_{B_j}\big(u(k)\big)$ qu'elles soient triangulaires et forment une partition, c.à.d. que :

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_{B_j}\big(u(k)\big) = 1$$

5. Conclusion

Différentes stratégies de commande utilisant la théorie de la logique floue ont été abordées dans ce document de notes de cours. La liste de techniques donnée dans ces notes n'est pas exhaustive. On peut indiquer par exemple les stratégies de commande prédictive floue et aussi les contrôleurs flous par mode glissants. L'aspect adaptable et universel de la logique floue lui permet de se rallier à l'automatisation de procédures telles que la mise en route, le réglage de paramètres, la surveillance de systèmes complexes pour lesquelles peu d'approches existaient auparavant.

La logique floue s'affirme comme une technique effective et opérationnelle. Utilisée à côté d'autres techniques de contrôle avancé, elle apporte un plus très apprécié dans les automatismes de contrôle industriel et domestiques d'une façon humainement intelligente.

La logique floue ne remplace pas nécessairement les systèmes de régulation conventionnels. Elle est complémentaire. Ses avantages viennent notamment de ses capacités à :

- ✓ formaliser et simuler l'expertise d'un opérateur ou d'un concepteur dans la conduite et le réglage d'un procédé,
- ✓ donner une réponse simple pour les procédés dont la modélisation est difficile,
- ✓ prendre en compte sans discontinuité des cas ou exceptions de natures différentes, et les intégrer au fur et à mesure dans l'expertise.

6. Bibliographie

- *Computational Intelligence: A Methodological Introduction* by Kruse, Borgelt, Klawonn, Moewes, Steinbrecher, Held, 2013, Springer.
- *Jan Jantzen*, *Foundations of Fuzzy Control*. Wiley, 2007 (209 pages).
- *Pedrycz, Witold (1993). Fuzzy control and fuzzy systems (2 ed.). Research Studies Press Ltd.*
- *Kevin M. Passino and Stephen Yurkovich, Fuzzy Control, Addison Wesley Longman, Menlo Park, CA, 1998*
- *N. Martaj and M. Mokhtari, Apprendre et maîtriser LabVIEW par ses applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014*
- *John H. Lilly*, Fuzzy Control and Identification, Copyright © 2010 John Wiley & Sons, Inc