Cours D'Algèbre 1

Neggal Bilel

4 septembre 2022

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce document cours d'Algèbre I et II avec exercices corrigés recouvre le programme d'Algèbre linéaire de la 1ère année universitaire.

Le lecteur trouvera une partie cours qui a été enseigné et à la fin de chaque chapitre une partie exercices corrigés dont la plupart ont été proposé dans le cadre de travaux dirigés ou ont fait l'objet de contrôle des connaissances.

Il est destiné principalement aux étudiants de la 1ère année L.M.D. ainsi que toute personne ayant besoin d'outils de bases d'Algèbre linéaire.

Nous espérons que ce polycopié réponde aux attentes des étudiants et qu'il les aidera à réussir.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE LOGIQUE

1.1 Logique

1.1.1 Notion de proposition

Définition 1.1 *une proposition est une expression mathématique à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.*

Exemple 1.1
1. ***Tout nombre premier est pair***, *cette proposition est fausse.*
2. $\sqrt{2}$ ***est un nombre irrationnel***, *cette proposition est vraie.*
3. ***L'entier*** n ***divise*** 2, *cet énoncé n'est ni vrai ni faux, donc ce n'est pas une proposition.*

Remarque 1.1
— *En mathématiques, la proposition est généralement notée par* $P, Q, L\ldots$.
— *Quand la proposition est vraie, on lui affecte la valeur* 1.
— *Quand la proposition est fausse, on lui affecte la valeur* 0.

1.1.2 Opérations Logiques

La négation

Définition 1.2 *La négation d'une proposition* $\boldsymbol{P}$ *est la proposition notée* $\bar{\boldsymbol{P}}$ *et qui est vraie si* $\boldsymbol{P}$ *est fausse et qui est fausse si* $\boldsymbol{P}$ *est vraie. On résume tout ça dans la table de vérité suivante :*

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Remarque 1.2 *La négation de la négation d'une proposition logique* $\boldsymbol{P}$ *est équivalente à* $\boldsymbol{P}$*, donc on a :* $\bar{\bar{P}} = P$

Exemple 1.2
1. *Soit* $E \neq \emptyset, P : a \in E$ *alors* $\bar{P} : a \notin E$.
2. $P : x + 3 = 0$, *alors* $\bar{P} : x + 3 \neq 0$.

La conjonction

Définition 1.3 *La conjonction des deux propositions **P** et **Q** est la proposition notée $(PetQ)$ ou $(P \bigwedge Q)$ et qui est vraie si **P** et **Q** sont simultanément vraies et fausse dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante :*

P	Q	$P \bigwedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple 1.3
1. *2 est un nombre pair et 3 un nombre premier, cette proposition est vraie.*
2. *$3 \leq 2$ et $4 \geq 2$, cette proposition est fausse.*

La disjonction

Définition 1.4 *La disjonction des deux propositions **P** et **Q** est la proposition notée $(PouQ)$ ou $(P \vee Q)$ et qui est fausse si **P** et **Q** sont simultanément fausses et vraie dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante :*

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple 1.4
1. *5 est un nombre impair ou 7 un nombre premier, cette proposition est vraie.*
2. *$3 \leq 2$ ou $2 \geq 4$, cette proposition est fausse.*

L'implication

Définition 1.5 *L'implication des deux propositions **P** puis **Q** est la proposition notée $(P \Rightarrow Q)$ qui est fausse si **P** est vraie et **Q** est fausse et qui est vraie dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante :*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple 1.5
1. $(P : 0 \leq x \leq 9) \Rightarrow (Q : \sqrt{x} \leq 3)$. *$P \Rightarrow Q$ est vraie.*
2. $(P : 3 = 7 - 4) \Rightarrow (Q : 7 = 4 - 3)$. *$P \Rightarrow Q$ est fausse.*

L'équivalence

Définition 1.6 *L'équivalence des deux propositions **P** et **Q** est la proposition notée $(P \Leftrightarrow Q)$ qui est vraie si **P** et **Q** sont simultanément vraies ou simultanément fausses et qui est fausse dans les autres cas. On peut la définir aussi par :*

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ est la proposition} (P \Rightarrow Q) \text{ et} (Q \Rightarrow P)$$

La table de vérité de l'équivalence est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple 1.6 *1.* $(P : x + 2 = 0) \Leftrightarrow (Q : x = -2)$.

2. $(P : 3 = 7 - 4) \Leftrightarrow (Q : 7 \neq 4 - 3)$. $P \Leftrightarrow Q$ *est vraie.*

Proposition 1.1 *Soient P et Q deux propositions logiques, alors on a :*

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.
2. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow \overline{(\bar{P} \vee Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q})$.

Propriété 1.1 *Soient la valeur de vérité des propositions $P; Q$ et R. Alors, les propriétés suivantes sont toujours vraies.*

1. *L'opérateur $\wedge$ est commutatif, c'est à dire :* $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$.
2. *L'opérateur $\vee$ est commutatif, c'est à dire :* $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.
3. *Les opérateurs logiques $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs :*
$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) \text{ et } (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$
4. *Diatributivite de $\wedge$ par rapport a V :*
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$
5. *Diatributivite de $\vee$ par rapport a $\wedge$:*
$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee Q).$$

Théorème 1.1 *Lois de de Morgan Soient P et Q deux propositions, alora on a :*

$$\overline{(P \wedge Q)} = (\bar{P} \vee \bar{Q}) \text{ et } \overline{(P \vee Q)} = (\bar{P} \wedge \bar{Q}).$$

comme réaultat de ce theoreme : (Le contraire de & et \$ est & ou o et le contraire de ou sat ex ef $\gg$).

Preuve 1.1 *On demontre ces equivalences a l'aide de tables de vérité*

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{(P \wedge Q)}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

de la même manière on a :

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q)}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

1.1.3 Les quantificateurs

Le quantificateur universel noté $\forall$

Le quantificateur universel note $\forall$ et qui signifie que & Pour tout élement x d'un ensemble E tel que la proposition $P(x)$ est uraie $\gg$, s'écrit egalement sous forme abrégée :

$$\forall x \in E, P(x)$$

Exemple 1.7 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 > 0$.*

Le quantificateur existentiel noté $\exists$

Le quantificateur existentiel note $\exists$ et qui aignifie que & il existe au moins un elément x de E tel que la proposition $P(x)$ est uraie ", s'écrit également sous forme abrégée :

$$\exists x \in E, P(x)$$

Exemple 1.8 *Il existe au moins un élement x de $\mathbb{R}$, tel que $x-1>0$. (Par exemple $x=3$).*

Le quantificateur existentiel unique noté $\exists!$

Le quantificateur existentiel unique note $\exists!$ signifie que ic il existe un et un seul element x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie », s'écrit egalement sous forme abrégée :

$$\exists! x \in E, P(x)$$

Exemple 1.9 *Pour la résolution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$, il existe un et un aeul élément $x=1$, car la solution $x=\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.*

Remarque 1.3 *Dans une phrase quantifiée, on ne peut pas modifier l'ordre des quantificateurs s'ils ne sont pas de mème nature.*

Exemple 1.10 *La proposition : $(\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y)) \Leftrightarrow$ Pour tout x dans E, nous cherchons un y dana E pour que $P(x,y)$ soit verifee. La négation de cette proposition eat : $(\exists x \in E, \forall y \in E, P(x,y)) \Leftrightarrow$ ll existe un seul x dans E, pour que $P(x,y)$ soit vérifee, pour tout y dana E.*

Remarque 1.4 *On peut permuter entre deux quanticateurs de la même nature*

$$(\forall x \in E, \forall y \in E, P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y \in E, \forall x \in E, P(x,y))$$

1.2 Méthodes de raisonnement

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie on peut utiliser ce qui suit :

1.2.1 Méthode de raisonnement direct

On suppose que **P** est vraie et on démontre que **Q** l'est aussi.

Exemple 1.11 *Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$ si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.*
On suppose que n est pair, i.e., $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$ donc

$$n.n = 2(2k^2) \Rightarrow n^2 = 2k'$$

on pose $k' = 2k^2 \in \mathbb{Z}$ ainsi $\exists k' \in \mathbb{Z}, n^2 = 2k', n^2$est pair, d'où le résultat.

1.2.2 Méthodes du raisonnement par la contraposée

Sachant que $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{G} \Rightarrow \bar{P}$, pour montrer que $P \Rightarrow Q$ on utilise la contraposée, c'est à dire il suffit de montrer que $\bar{G} \Rightarrow \bar{P}$ de manière directe, on suppose que $\bar{Q}$ est vraie et on montre que $\bar{P}$ est varie.

Exemple 1.12 *Montrons que n^2 est impair $\Rightarrow n$ est impair. Par contraposée il suffit de montrer que si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair voir l'exemple précédent.*

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que R est une proposition vraie on suppose que $\bar{R}$ est vraie et on tombe sur une contradiction (quelque chôse d'absurde), $R : P \Rightarrow Q$ est une implication par l'absurde on suppose que : $\bar{R} : P \wedge \bar{Q}$ est vraie et on tombe sur une contradiction.

Exemple 1.13
- *Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.*
- *n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair, par l'absurde : on suppose que n est pair et que n^2 est impaire contradiction*

1.2.4 Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

Exemple 1.14 *n un nombre pair $\Rightarrow n^2 + 1$ est pair, fausse car pour $n = 2 \Rightarrow n^2 + 1 = 5$ n'est pas pair, c'est un contre-exemple.*

1.2.5 Raisonnement par récurrence

Pour montrer que $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, est vraie on suit les étapes suivantes :

1. On montre que $P(n_0)$ est vraie, (valeur initiale).
2. On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n.
3. On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$. Alors P est vrai pour tous $n \geq n_0$

Exemple 1.15 *Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$*

1. *Pour $n = 1, P(1)$ est vraie $1 = \frac{1(2)}{2}$.*

2. *On suppose que :* $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *est vraie.*

3. *On montre que :* $1+2+\ldots+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ *est vraie.*

   on a : $1+2+\ldots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

   ainsi P *est vraie à l'ordre* $(n+1)$ *alors* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *est vraie.*