Série de TD 01
Notions de Logique

Exercice 1 *Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions ? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse :*

1. $\sqrt{2}$ *est nombre irrationnel.*
2. 136 *est un multiple de* 17 *et* 2 *divise* 167.
3. 136 *est un multiple de* 17 *ou* 2 *divise* 167.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = 5$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n + 3 = 7$
6. *L'entier a divise* 12.

Exercice 2 *Soient* P, Q *et* R *des propositions. Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?*

1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
2. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $\overline{P \wedge (\overline{Q \wedge R})} \Leftrightarrow Q$

Exercice 3 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :*

1. f *ne s'annule jamais*
2. f *est paire*
3. f *est strictement croissante*
4. f *est majorée.*
5. f *est inférieure à* g

Exercice 4 *Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses. Puis donner leur négation*

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \quad et \quad x + 2 = 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

Exercice 5

1. *En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que :*
   - $\sqrt{2}$ *n'est pas un nombre rationnel*
   - *Soit* $n > 0$, *si* n *est le carré d'un entier alors* $2n$ *n'est pas le carré d'un entier.*
2. *Monter par récurrence :*
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx.$
3. *Par contraposée, montrer que :*
   - $(n^2 - 1)$ *n'est pas divisible par* $8 \Rightarrow n$ *est pair.*

Corrigé Série de TD 01

Corrigé exercice 1 *Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions ? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse :*

1. $\sqrt{2}$ *est nombre irrationnel.*
   Cette expression est une proposition (car on peut dire qu'elle est vraie)
2. 136 *est un multiple de* 17 *et* 2 *divise* 167.
   Est une proposition fausse car 2 *ne divise pas* 167
3. 136 *est un multiple de* 17 *ou* 2 *divise* 167.
   Est une proposition vraie car 136 *est multiple de* 17.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n+1=5$
   Est une proposition fausse car pour $n = 1 \in \mathbb{N}$ *on a* $n+1 = 2 \neq 5$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n+3=7$
   Est une proposition vraie car il existe un élément $n = 4 \in \mathbb{N}$ *tel que* $n+3=7$
6. *L'entier* a *divise* 12.
   N'est pas une proposition car on ne peut pas lui attribue une seul leur de vérité.

Corrigé exercice 2 1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0

2. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$a = (P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$b = (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

3. $\overline{P \wedge \left(\overline{Q \wedge R}\right)} \Leftrightarrow Q$ *On a* $\overline{P \wedge \left(\overline{Q \wedge R}\right)} = \bar{P} \vee (Q \wedge R)$ *donc* $\bar{P} \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow Q$

P	Q	R	$\bar{P}$	$Q \wedge R$	$a = \bar{P} \vee (Q \wedge R)$	$a \Leftrightarrow Q$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0

Corrigé exercice 3 1. f *ne s'annule jamais devient :*$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

2. f *est pair devient :* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.
3. f *est strictement croissante devient :* $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$.
4. f *est majorée devient :* $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
5. f *est inférieur où* g *devient :* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

Corrigé exercice 4 1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0 \quad et \quad x+2=0)$
Cette proposition est fausse, *car* x *devrait être simultanément égale à* (-1) *et* (-2).
La négation : $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1 \neq 0 \quad où \quad x+2 \neq 0)$

2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0)$ *et* $(\exists x \in \mathbb{R}, x+2=0)$
Cette proposition est vraie, *car* $(\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0)$ *est vraie il suffit de prendre*$(x = -1)$ *et de la même façon* $(\exists x \in \mathbb{R}, x+2=0)$ *est vraie il suffit de prendre*$(x=-2)$.
La négation : $(\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \neq 0)$ *où* $(\forall x \in \mathbb{R}, x+2 \neq 0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y > 0$
Cette proposition est vraie, *car si on prend* $y = -x+1$ *on a :* $x+y = 1 > 0$.
La négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y > 0$
Cette proposition est fausse, *car si on prend* $y = -x-2$ *on a :*$x+y = -2 < 0$.
La négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$

Corrigé exercice 5 1. *En utilisant le raisonnement par l'absurde montrons que :* $\sqrt{2}$ *n'est pas un nombre rationnel.*
On suppose que $\sqrt{2}$ *est un nombre rationnel i.e* $\exists a, b \in \mathbb{N}$ *et* $b \neq 0$ *premier entre eux tel que :* $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$
alors a^2 *est pair* $\Rightarrow a$ *est pair ceci est équivalent à :* $\exists K \in \mathbb{N}$ *tel que* $a = 2K$
ainsi : $2b^2 = 4K^2 \Leftrightarrow b^2 = 2K^2$
on déduit que b^2 *est pair* $\Rightarrow b$ *est pair.*
Comme a *et* b *sont premier entre alors on a une contradiction, alors ce qui nous avons supposé au départ est faux, donc* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2. *Monterons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
D'abord, On pose $P(n) : 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
(1) *Pour* $n = 1$ *on a :*$1 = \frac{1^2(2)^2}{4} = 1$, *donc* $P(1)$ *est vraie .*
(2) *On suppose que* $P(n)$ *est vraie.*
(3) *On montre que* $P(n+1)$ *est vraie, avec :*
$$P(n+1) : 1 + 2^3 + 3^3 + ... + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$
On a :
$$\begin{aligned} 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \end{aligned}$$
donc : $1 + 2^3 + 3^3 + ... + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$
Ainsi $P(n+1)$ *est vraie, par récurrence on a :* $P(n)$ *est vraie.*

3. *Montrons par la contraposée que :*
   (n^2-1) *n'est pas divisible par* $8 \Rightarrow n$ *est pair.*
   Il suffit de montrer que sa contraposée : (n *est impair* $\Rightarrow (n^2-1)$ *est divisible par* 8*) est vraie.*
   Soit n impair alors $\exists K \in \mathbb{Z}$ *tel que :* $n = 2K+1$,
   donc : $n^2-1 = (2K+1)^2-1 = 4K^2+4K = 4K(K+1)$
   Il suffit de montrer que $K(K+1)$ *est pair .*

   1 cas *Si* K *est pair alors* $K+1$ *est impair donc le produit* $K(K+1)$ *est pair.*

   2 cas *Si* K *est impair alors* $K+1$ *est pair donc le produit* $K(K+1)$ *est pair .*

   Ainsi $K(K+1)$ *est pair ,*$\exists K' \in \mathbb{Z}$ *tel que* $K(K+1) = 2K'$ *d'où :* $n^2-1 = 4(2K')$

   $$n^2-1 = 8K' \Rightarrow n^2-1 \text{ est divisible par } 8.$$