CHAPITRE III ANALYSE DES SYSTÈMES DANS L'ESPACE D'ÉTAT

III.1 Introduction

La représentation d'état des systèmes requiert des méthodes d'analyse spécifiques concernant la stabilité, la commandabilité et l'observabilité. Dans ce chapitre, nous aborderons la résolution des équations d'état et les méthodes de calcul de la matrice de transition, l'analyse modale (diagonalisation), ainsi que l'étude de la stabilité. Enfin, nous introduirons deux concepts fondamentaux de la représentation d'état : la commandabilité et l'observabilité.

III.2 Résolution de l'équation d'état

Nous avons vu que l'équation d'état décrit la dynamique temporelle d'un système à travers ses variables d'état. La résolution de cette équation permet donc de déterminer le comportement dynamique du système au fil du temps. Pour cela, commençons d'abord par l'équation homogène $\frac{dX}{dt} = AX$ sa solution est donnée par :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) \tag{3.1}$$

t_0 est l'instant initial.

On a :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow e^{-At}\frac{dx}{dt} = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) = Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Bu(t) \rightarrow$$

$$e^{-At}\frac{dx}{dt} - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Bu(t) \rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t)e^{-At}$$

$$e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Et enfin :

$$x(t) = \underbrace{\underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{Réponse forcée}}}_{\text{Réponse complète}} \tag{3.2}$$

La solution $x(t)$ est exprimée comme étant la somme de la solution du régime libre (lorsqu'aucun signal d'entré n'est appliqué $u(t) = 0$), et du régime forcé (lorsque les conditions initiales sont nulles).

e^{At} est appelée matrice de transition.

III.3 Calcul de la matrice de transition

Le développement en série de Taylor de l'exponentielle matricielle e^{At} est donné par :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^n}{n!}t^n + \ldots \tag{3.3}$$

.
Ou bien :

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n \tag{3.4}$$

Cette série est donc une somme infinie qui permet d'approximer la fonction exponentielle d'une matrice A en fonction de ses puissances. Il existe plusieurs approches pour calculer la matrice de transition e^{At}, parmi lesquelles :

III.3.1 Le théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton offre une approche intéressante pour calculer e^{At} en utilisant un nombre fini d'opérations. Selon ce théorème, toute matrice carrée (A) est solution de son équation caractéristique. Cette propriété est donc utilisée pour exprimer les puissances élevées de (A) en termes de puissances inférieures.

Si $P_A(s)$ est le polynôme caractéristique de A_{nxn}, défini comme :

$$P_A(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 \tag{3.5}$$

Alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton A vérifie :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0 \tag{3.6}$$

D'ou :

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_0 I \tag{3.7}$$

En remplaçant (3.7) dans (3.4), on peut écrire :

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n = \alpha_{n-1}(t) A^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t) A + \alpha_0 I \tag{3.8}$$

Où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ coefficients à déterminer.

Lorsque les valeurs propres de la matrice A sont distinctes, le calcul des coefficients $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ peut être simplifié en utilisant une base de vecteurs propres $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ de A. Notons les valeurs propres correspondantes $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ respectivement, et réécrivons l'équation (3.8) appliquée à chaque vecteur propre de A :

$$e^{At} x_k = \alpha_{n-1}(t) A^{n-1} x_k + \ldots + \alpha_1(t) A x_k + \alpha_0(t) I x_k \tag{3.9}$$

Etant donné que $Ax_k = \lambda_k x_k$ (voir chapitre 2), on peut écrire :

$$e^{At}x_k = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1}x_k + \ldots + \alpha_1(t)Ax_k + \alpha_0(t)Ix_k = \sum_{0}^{+\infty}\frac{\lambda_k^n}{n!}t^n x_k = e^{\lambda_k t}x_k \tag{3.10}$$

On en déduit

$$e^{\lambda_k t} = \alpha_{n-1}(t)\lambda_k^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t)\lambda_k + \alpha_0(t) \tag{3.11}$$

Les coefficients $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ sont alors trouvés en résolvons le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} e^{\lambda_0 t} & = \alpha_{n-1}(t)\lambda_0^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t)\lambda_0 + \alpha_0(t) \\ e^{\lambda_1 t} & = \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_0(t) \\ \vdots & \\ e^{\lambda_{n-1} t} & = \alpha_{n-1}(t)\lambda_{n-1}^{n-1} + \ldots + \alpha_1(t)\lambda_{n-1} + \alpha_0(t) \end{cases} \tag{3.12}$$

<u>**Exemple :**</u> Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, calculons e^{At} en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.

Les valeurs propres de A sont $(\lambda_1 = 2)$ *et* $(\lambda_2 = -1)$. Les vecteurs propres correspondants Peuvent être trouvés en résolvons le système d'équations homogène $(A - \lambda I)X = 0$ pour chaque valeur propre. Par exemple pour $\lambda_1 = 2$, on a :

$$(A - 2I)X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc $x_2 = 0$, et x_1 peut être n'importe quel nombre réel non nul. Prenons $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

De la même manière, pour $(\lambda_2 = -1)$, le vecteur propre correspondant est la solution de l'équation caractéristique $(A - \lambda_2 I)X = (A + I)X = 0$, ce qui donne $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Les coefficients $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ sont la solution de :

$$\begin{cases} e^{2t} & = \alpha_1(t) \cdot 2 + \alpha_0(t) \\ e^{-t} & = \alpha_1(t) \cdot (-1) + \alpha_0(t) \end{cases}$$

Pour résoudre ce système d'équation, réécrivons la deuxième équation comme suit :

$\alpha_0(t) = e^{-t} + \alpha_1(t)$

Remplaçons cette expression dans la première équation : $e^{2t} = \alpha_1(t)\cdot 2 + (e^{-t} + \alpha_1(t))$

D'ou $e^{2t} - e^{-t} = \alpha_1(t)\cdot 2 + \alpha_1(t) \rightarrow e^{2t} - e^{-t} = \alpha_1(t)\cdot 3$

Et enfin $\alpha_1(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3}$ et $\alpha_0(t) = e^{-t} + \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3}$

Donc : $e^{At} = \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I = e^{At} = \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} + \left(e^{-t} + \dfrac{e^{2t} - e^{-t}}{3}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Enfin :

$$e^{At} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2e^{2t} - 2e^{-t} + 3e^{-t} + e^{2t} - e^{-t} & 0\\ 0 & -e^{2t} + e^{-t} + 3e^{-t} + e^{2t} - e^{-t}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3e^{2t} + e^{-t} & 0\\ 0 & e^{2t} + 3e^{-t}\end{bmatrix}$$

III.4 Stabilité des systèmes représentés en espace d'état

La solution de l'équation d'état montre que pour que le système soit stable (convergent), il faut que la matrice de transition e^{At} soit convergente ($\lim\limits_{t\to+\infty} e^{At} = 0$), ce qui implique que ces **valeurs propres doivent êtres a parties réelles négatives.**

<u>Exemple :</u> Etudier la stabilité du système ayant la matrice d'état $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Calculons ses valeur propres, ils sont les racines de :

$$\left|\lambda.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\right| = 0 \rightarrow \left|\begin{pmatrix}\lambda - 1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda - 2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda - 3\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)\begin{vmatrix}(\lambda - 2) & -1\\ 0 & (\lambda - 3)\end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix}0 & (\lambda - 2)\\ 0 & 0\end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Donc les valeurs propres de A sont : $\lambda_1=1$, $\lambda_2= 2$, $\lambda_3=3$. Ils sont tous strictement positives donc le système est instable.

III.5 Notions de commandabilité et d'observabilité

La commandabilité et l'observabilité sont des concepts fondamentaux dans le domaine de la théorie de commande des systèmes dynamiques. Elles sont utilisées pour évaluer les possibilités de commande et/ou de mesure d'un système, respectivement.

III.5.1 La commandabilité

La commandabilité d'un système dynamique décrit la capacité à conduire le système d'un état initial à un état final en utilisant une certaine loi de commande. Un système est dit complètement commandable s'il est possible d'atteindre n'importe quel état du système en manipulant les entrées (commandes) appropriées sur une certaine période de temps. Mathématiquement, cela peut être exprimé par l'existence d'une loi de commande $u(t)$ telle que, pour un état initial $x(t_0) = x_0$, le système atteint l'état $(x(t_1) = x_1)$ dans l'intervalle de temps $[t_0 \; t_1]$. Cette condition de commandabilité est fondamentale dans la conception des systèmes de commande, car elle garantit une influence complète sur l'évolution du système en ajustant les commandes.

III.5.2 Critère de commandabilité

Soit un système représenté par l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) \end{aligned} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{r\times m}$$

Ce système est dit **commandable** si et seulement si la matrice de commandabilité :

$$C_{A,B} = (B|\ AB|\ldots|A^{n-1}B) \tag{3.13}$$

est de rang *n* (plein rang).

<u>**Rappel :**</u> Le rang d'une matrice *A* correspond à la dimension du plus grand mineur (sous-ensemble carré) non nul.

Par exemple le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est $r = 2$, car son déterminant est nul, et son plus grand mineur non nul est de dimension 2x2.

<u>**Exemple 1 :**</u> Etudions la commandabilité du système dont les matrices d'état sont :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculons la matrice de commandabilité : $C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$Det(C) = -2 \neq 0$, « C » est de plein rang et le système est complétement commandable

<u>**Exemple 2 :**</u> Etudions la commandabilité du système dont les matrices d'état sont :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculons la matrice de commandabilité : $C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cette matrice est de rang 1, donc le système n'est pas complètement commandable, seul le premier état est commandable, le deuxième et troisième états sont indépendants de la commande.

III.5.3 L'observabilité

L'observabilité est la capacité à déterminer l'état actuel du système en analysant ses sorties mesurées. Elle évalue la possibilité de reconstruire l'état du système en fonction des informations disponibles. Un système est considéré comme complètement observable lorsque chaque état peut être reconstruit à partir des sorties mesurées sur une période de temps donnée. En d'autres termes, la complète observabilité signifie que l'état actuel du système peut être rétroactivement reconstruit à partir des informations de commande et de sortie sur un intervalle de temps donné.

III.5.4 Critère de l'observabilité

Un système dynamique est dit complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité :

$$\mathrm{O}_{C,A} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

est de rang n (plein rang).

<u>Exemple :</u> Etudions l'observabilité du système dont les matrices d'état sont :
$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice d'observabilité est $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Le rang de O est 2 (son déterminant est non nul), donc le système est complètement observable.

<u>Remarque :</u>

- ✓ La forme canonique de commandabilité est commandable.
- ✓ La forme canonique d'observabilité est observable
- ✓ Dualité commandabilité-observabilité :
  Un système ayant les matrices d'état $(A,\ B, C, D)$ est commandable si et seulement si son dual $(A^T,\ \mathrm{C}^\mathrm{T}, B^T, D)$ est observable, et vice-versa.

<u>Exemple :</u>

Considérons un autre exemple de système dynamique dont les matrices d'état sont :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérifions la dualité commandabilité-observabilité en considérant la paire $(A,\ B)$ et la paire (B^T, A^T) .

- ✓ La matrice de commandabilité est $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, le rang de $\mathcal{C}$ est 2, donc le système est commandable.

- ✓ La matrice d'Observabilité associée à (B^T, A^T) est : $O = \begin{bmatrix} B^T \\ A^T B^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, le rang de O est 2 , alors la paire (B^T, A^T) est observable.