Chapitre 4. Commande par retour d'état

IV.1 Introduction

La commande par retour d'état est une méthode utilisée dans les systèmes de commande à rétroaction où le vecteur d'état (qui représente l'état interne du système) est utilisé pour calculer l'action de commande. Cette approche permet de modifier le comportement du système en fonction de sa représentation d'état. Cependant, elle n'est applicable que si le système est commandable.

IV.2 Loi de commande par retour d'état

La figure suivante montre la structure de bouclage par retour d'état :

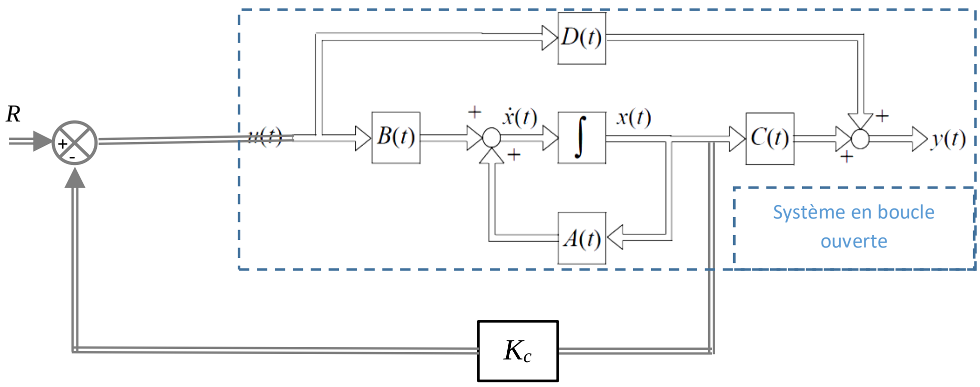

Fig 4.1 Bouclage par retour d'état

La représentation d'état du système en boucle ouverte est :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B.u \\ y = Cx + D.u \end{cases} \tag{4.1}$$

La loi de commande par retour d'état est donnée par :

$$u = -K_c x + R \tag{4.2}$$

En remplaçant u dans l'équation du système en boucle ouverte, on obtient la représentation d'état du système en boucle fermé (corrigé) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(A - BK_c\right)x + B.R \\ y = \left(C - DK_c\right)x + D.R \end{cases} \tag{4.3}$$

Les valeurs propres (ou pôles) du nouveau système sont alors les racines du polynôme caractéristique :

$$P_{(A-BK_c)}(s) = \det\left(sI - \left(A - BK_c\right)\right) \tag{4.4}$$

Si le système est commandable, alors il est possible d'effectuer un placement de pôles dans le plan complexe. Ce placement devient plus simple en considérant la forme canonique de la commandabilité :

$$A_c - B_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 - k_1^c & -a_1 - k_2^c & \cdots & \cdots & -a_{n-1} - k_n^c \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Avec A_c, B_c les matrices d'état du système sous la forme canonique de commandabilité.

Les coefficients du vecteur de retour d'état K_c peuvent être obtenus par la méthode de placement de pôles, en comparant le polynôme caractéristique de la forme commandable en boucle fermée avec le polynôme constitué par les pôles désirés en boucle fermée comme suit :

$$\begin{aligned} &P_{A_c-B_cK_c}(s) = s^n + (a_{n-1} + k_n^c)s^{n-1} + \ldots + (a_1 + k_2^c)s + (a_0 + k_1^c) \\ &\textit{polynôme désiré } P_d(s) = s^n + a_{n-1}^d s^{n-1} + \ldots + a_1^d s + a_0^d \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les coefficients de K_C sont déterminés par identification comme suit :

$$k_i^c = a_{i-1}^d - a_{i-1} \qquad 1 \le i \le n \tag{4.7}$$

Cette formule est applicable à tout système commandable mis sous forme canonique de commandabilité. Dans la section suivante, nous allons voir comment transformer un système commandable en sa forme canonique de commandabilité.

IV.2.1 Etapes de mise œuvre de la méthode de placement de pôles

Pour mettre en œuvre la méthode de placement des pôles dans la commande par retour d'état pour un système sous la forme canonique de commandabilité, on suit les étapes suivantes :

1) Si le système est sous la forme commandable : combiner les équations d'état du système avec les termes de rétroaction k_i^c pour créer l'équation caractéristique du système en boucle fermée : $P_{(A-BK_c)}(s) = \det\left(sI - \left(A - BK_c\right)\right)$

2) Etablir de l'équation caractéristique désirée à partir des pôles souhaités :
$P_d(s) = (s - p_1)(s - p_2)...(s - p_n) = s^n + a_{n-1}^d s^{n-1} + ... + a_1^d s + a_0^d$

3) Egaliser les deux équations caractéristiques $P_{(A-BK_c)}(s) = P_d(s)$, et déterminer les gains k_i^c par identification terme à terme.

Exemple 1 :

Sois les matrices d'état d'un système sous la forme canonique de commandabilité :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On veut que le système en boucle fermée ait les pôles (-2, -3). Le polynôme caractéristique désiré est donc exprimé comme suit : $P_d(s) = (s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$.

Appliquons la formule (4.7) :

$$\begin{cases} k_1^c = a_0^d - a_0 = 6 - 3 = 3 \\ k_2^c = a_1^d - a_1 = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

Donc : $K_c = [3 \quad 1]$.

Si le système n'est pas sous la forme canonique de commandabilité, on doit d'abord le mettre sous cette forme en procédant à sa transformation. La section suivante présente la méthode de passage vers la forme canonique de commandabilité.

IV.2.2 Passage à la forme canonique de commandabilité

Nous avons vu que la forme canonique de commandabilité est plus appropriée pour la commande par retour d'état, d'où la nécessité d'utiliser une méthode de transformation de n'importe quel système commandable en une forme canonique de commandabilité.

Pour tout système commandable, il existe un changement de base régulier T qui permet de mettre tout système sous forme la forme canonique de commandabilité : $z = Tx$. La représentation d'état du système transformé devient alors :

$$\begin{cases} \dot{z} = TAT^{-1}z + TBu \\ y = CT^{-1}z + Du \end{cases} \tag{4.8}$$

Avec T matrice de transformation exprimée par :

$$T = (C_{A_c,B_c})(C_{A,B})^{-1} \tag{4.9}$$

Avec :

$C_{A,B} = (B|\ AB|...|A^{n-1}B\ )$ matrice de commandabilité du système,

$C_{A_c,B_c} = (B_c|\ A_cB_c|...|A_c^{n-1}B_c)$ matrice de commandabilité du système mis sous la forme canonique de commandabilié,

$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0^c & -a_1^c & \dots & \dots & -a_{n-2}^c & -a_{n-1}^c \end{bmatrix}$, $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrices d'état du système sous la forme canonique de commandabilité.

Exemple 2 :
Considérons la représentation d'état d'un système dynamique :

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, où : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$

Les matrices d'état de la forme canonique de commandabilité de cette représentation sont :

$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^c & -a_1^c \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
a_0^c et a_1^c sont les coefficients de l'équation caractéristique : $\det(sI - A) = 0$.

On a : $\det(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s \end{bmatrix} = s(s-1) - 6 = s^2 - s - 6$, donc $a_0^c = -6, a_1^c = -1$
Enfin $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Ensuite, on construit la matrice de transformation comme suit :

$T = (C_{A,B})(C_{A_c,B_c}) = (B_c, A_cB_c)(B, AB)^{-1}$

On a $(B, AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $(C_{A_c,B_c}) = (B_c, A_cB_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, donc :

$$T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{bmatrix} \text{ et } T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 0\end{pmatrix}$$

Maintenant effectuons le changement de variable $(z = Tx)$, l'équation d'état sous sa forme canonique commandable devient :

$$\begin{cases}\dot{z}=TAT^{-1}z+TBu\\ y=CT^{-1}z+Du\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{z}=\begin{bmatrix}0 & 1\\6 & 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}z\end{cases}$$

Maintenant, le système est en forme commandable, prêt pour la conception du contrôleur par retour d'état.

IV.3 Formule d'Ackermann

La formule d'Ackermann est une méthode utilisée en commande par retour d'état pour calculer la matrice de gain K directement à partir de la matrice de gain K_c obtenue à partir de la forme de commandabilité du système. Pour un système commandable, la formule d'Ackermann est exprimée comme suit :

$$K=K_cT^{-1} \tag{4.10}$$

Où :

- K est la matrice de gain du système,

- K_c est la matrice de gain calculée à partir de la forme canonique de commandabilité,

- T est la matrice de transformation associée à la forme canonique.

<u>Exemple 3 :</u>

Reprenons le système de l'exemple 2 où :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\quad D=0$$

Appliquons la formule d'Ackermann pour trouver le gain de retour d'état pour avoir les pôles désirés (-1, -2) en boucle fermée. D'abord calculons le gain de retour du système sous la forme canonique de commandabilité K_c.

Le polynôme caractéristique désiré est exprimé comme suit :

$P_d(s) = (s\ +\ 1)(s\ +\ 2) = s^2 + 3s + 2$.

On a déjà calculer $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ dans l'exemple précédent, donc appliquons directement la formule (4.7) :

$$\begin{cases} k_1^c = a_0^d - a_0 = 2 - (-6) = 8 \\ k_2^c = a_1^d - a_1 = 3 - (-1) = 4 \end{cases}$$

Donc : $K_c = [8 \quad 4]$.

Enfin on a : $K = K_c T^{-1} = [8 \quad 4]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = [12 \quad 8]$.