CHAPITRE 3

Théorie des ensembles avec Exercices Corrigés

1. Notion d'ensemble et propriétés

1.1. Ensemble.

DÉFINITION 1.1. *Un ensemble est une collection d'objets mathématiques (éléments) rassemblés d'après une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou pas à un ensemble.*

EXEMPLE 1.2. (1) *E : l'ensemble des étudiants de l'université d'USTO.*

(2) *On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.*

(3) *L'ensemble des nombre pairs se note : $P = \{x \in \mathbb{N}/2 \text{ divise } x\}$.*

(4) *L'ensemble vide est noté : $\emptyset$ qui ne contient aucun élément.*

1.2. Inclusion. On dit que l'ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tous les éléments de A appartiennent à B et on note $A \subset B$,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)).$$

La négation :

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)).$$

EXEMPLE 1.3. (1) *On désigne $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombre réels on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.*

(2) *On désigne $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombre entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

1.3. Egalité de deux ensembles : Soient A, B deux ensembles sachant $A = B$, cela veut dire que :

$$A = B \Leftrightarrow ((A \subset B)\text{et}\,(A \subset B)).$$

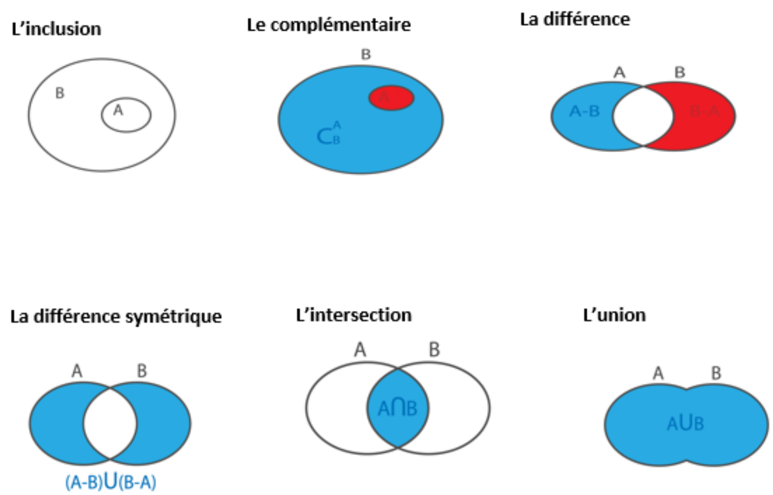
1.4. Différence de deux ensembles. La différence de deux ensembles A, B est un l'ensemble des élements de A qui ne sont pas dans B, noté $A - B$.

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si $A \subset B$ alors $B - A$ est aussi appelé le complémentaire de A dans B, il est noté C_B^A, A^c.

$$C_B^A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}.$$

1.5. Opérations sur les ensembles.



1.5.1. *L'union.* La réunion ou l'union de deux ensembles A et B est l'ensemble des élements qui appartiennent à A ou B, on écrit $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

La négation :

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B).$$

1.5.2. *L'intersection.* L'intersection de deux ensembles A, B est l'ensemble des élséments qui appartiennent à A et B on note $A \cap B$.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

La négation :

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B).$$

Remarque 1.4. (1) *Si A, B n'ont pas d'élements en commun, on dit qu'ils sont disjoints, alors $A \cap B = \emptyset$.*
(2) $B = C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = E$ *et* $A \cap B = \emptyset$.
(3) $A - B = A \cap B^c$.

1.5.3. *La différence symétrique.* Soient E un ensemble non vide et $A, B \subset E$, la différence symétrique entre deux ensembles A, B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A - B$ ou $B - A$ noté $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$
$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}.$$

1.6. Propriétés des opérations sur les ensembles.

1.6.1. *La commutativitée.* Quels que soient A, B deux ensembles :

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

1.6.2. *L'associativitée.* Quels que soient A, B, C deux ensembles :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

1.6.3. *la distributivitée.* Quels que soient A, B, C deux ensembles :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.6.4. *L'idempotence.*

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

1.6.5. *Lois de Morgan.*

$$a)(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$
$$b)(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

PREUVE. *Montrons que* $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ *et* $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$,

$(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$:
Soit $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$ *ainsi* $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in (A^c \cap B^c)$, *d'où* $(A \cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)$.

$A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$:
Soit $x \in (A^c \cap B^c) \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B)$, *d'où* $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$, *ainsi* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. *On suit le même raisonnement pour la seconde relation.*

1.7. Produit Cartesien. Soient A, B deux ensembles , $a \in A, b \in B$ on note $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$ l'ensemble $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre il est appelé ensemble produit cartésien des ensemble A et B.

REMARQUE 1.5. *Si A et B sont des ensembles finis et si on désigne par :*

$CardA$: *le nombre des éléments de A.*
$CardB$: *le nombre des éléments de B. on aura :*

$$Card(A \times B) = CardA \times CardB.$$

EXEMPLE 1.6. *a) Soit* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

(1) $A \subset E, B \subset E$.
A n'est pas inclus dans B car $1 \in A \wedge 1 \notin B$.
B n'est pas inclus dans A car $8 \in B \wedge 8 \notin A$.
(2) $A \cap B = \{2, 4, 6\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

(3) $A - B = \{1, 3, 5\}, B - A = \{8\}$.

(4) $A\Delta B = \{1, 3, 5, 8\}$.

b) $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\},$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\},$$

$A \times B \neq B \times A$, *car* $(3, 2) \in B \times A$, *et* $(3, 2) \notin A \times B$.

2. Applications et relations d'équivalences

2.1. Application.

Définition 2.1. *On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F une loi de correspondance (ou une relation de correspondance) permettant d'associer à tout $x \in E$ un unique élément $y \in F$ où E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivé.*
L'élément y associé à x est l'image de x par f, on note $x \longmapsto y/y = f(x)$.

Exemple 2.2. *Soit l'application suivante :*

(1) $f_1 : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$
$n \longmapsto 4n + 2$.

(2) $f_2 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto 5x + 3$.

2.2. Image directe et image réciproque.

2.2.1. *a) L'image directe.* Soit $f : E \longmapsto F$ et $A \subset E$, on appelle image de A par f un sous ensemble de F, noté $f(A)$ tel que

$$f(A) = \{f(x) \in F/x \in A\},$$

sachant que $f(A) \subset F$, et que $A, f(A)$ sont des ensembles.

2.2.2. *b) L'image réciproque.* Soit $f : E \longmapsto F$ et $B \subset F$, on appelle l'image réciproque de B par f, la partie de E notée $f^{-1}(B)$ telle que

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\},$$

sachant que $f^{-1}(B) \subset E$, et que $B, f^{-1}(B)$ sont des ensembles.

Exemple 2.3. (1) *Soit f l'application définie par :*

$$f : [0, 3] \longmapsto [0, 4]$$

$$x \longmapsto f(x) = 2x + 1$$

Trouver $f([0, 1])$?

$$f([0, 1]) = \{f(x)/x \in [0, 1]\} = \{2x + 1/0 \leq x \leq 1\},$$

on a :$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 3$, *alors* $f([0, 1]) = [1, 3] \subset [0, 4]$.

(2) *Soit f l'application définie par :*

$$g : [0,2] \longmapsto [0,4]$$
$$x \longmapsto f(x) = (2x-1)^2$$

Calculer $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(]0,1[)$.

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0,2]/f(x) \in \{0\}\} = \{x \in [0,2]/f(x) = 0\} = \{x \in [0,2]/(2x-1)^2 = 0\} = \{\frac{1}{2}\}.$$

$$f^{-1}(]0,1[) = \{x \in [0,2]/f(x) \in]0,1[\} = \{x \in [0,2]/0 < (2x-1)^2 < 1\},$$

On a : $(2x-1)^2 > 0$ est verifiée $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, x \in [0,2]$. D'autre part

$$(2x-1)^2 < 1 \Rightarrow |2x-1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1,$$

et donc $x \in]0,1[$, en regroupant les deux inégalités, on obtient

$$f^{-1}(]0,1[) = ([0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},2])\cap]0,1[=]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[.$$

2.2.3. *1) La surjection.*

DÉFINITION 2.4. *L'image $f(E)$ de E par f est une partie de F. Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, on dit que f est une application surjective de E dans F on a : $f(E) = F$.*

$$f \textit{est surjective} \Leftrightarrow \ (\forall y \in F), (\exists x \in E)/f(x) = y.$$

EXEMPLE 2.5. *Les applications suivantes sont-elles surjective ?*

(1) $f_1 : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$
$n \longmapsto 4n+2.$
f_1 n'est pas surjective, en effet si on suppose qu'elle est surjective c'est à dire $\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}/4n+1 = y \Longrightarrow n = \frac{y-1}{4}$, or $n = \frac{y-1}{4} \notin \mathbb{N}$ contradiction f_1 n'est pas surjective.

(2) $f_2 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto 5x+3.$
f_2 est surjective car : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}/5x+3 = y \Longrightarrow x = \frac{y-3}{5} \in \mathbb{R}$.

2.2.4. *2) L'injection.*

DÉFINITION 2.6. *Quand on a deux éléments dictincts de E correspondent pas f à deux image différentes de F, f est dite application injective, on a alors :*

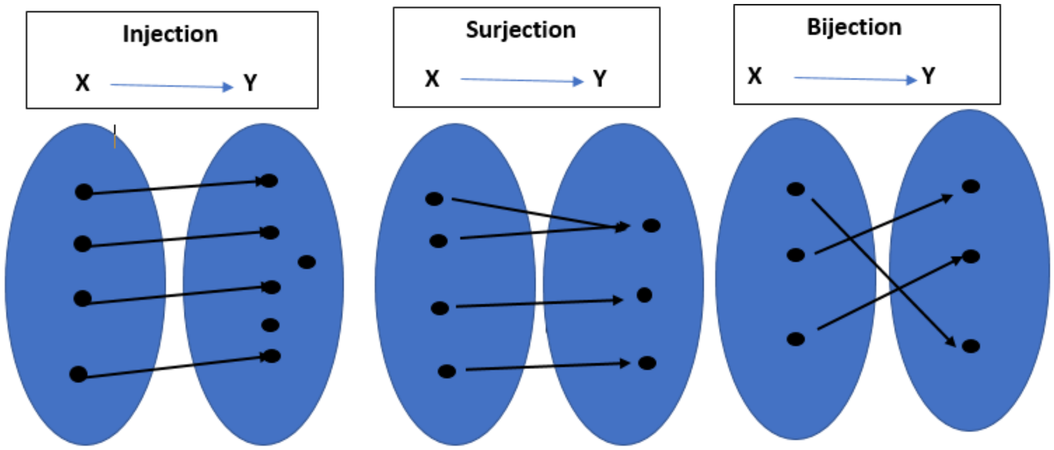
$$(f \textit{est injective}) \ \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

ou

$$(f \textit{est injective}) \ \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

EXEMPLE 2.7. *Les applications suivantes sont-elles injerctive ?*

(1) $f_1 : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$
$n \longmapsto 4n+2.$
f_1 est injective car :$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4n_1+2 = 4x_2+2 \Rightarrow 4n_1 = 4n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$.



(2) $f_2 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto 5x+3.$
f_2 est injective car :$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$

2.2.5. *3) La bijection.* f est une application bijective si elle injective et surjective, c'est à dire tout élément de F est l'image d'un unique élément de E, f est bijective si et seulement si :

$$(\forall y \in F), (\exists! x \in E), (f(x) = y). \text{ } (\exists! \text{ signifie unique})$$

Exemple 2.8. (1) *f_1 n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.*
(2) *f_2 est bijective.*

Remarque 2.9. *Lorsque une application f est bijective cela veut dire que l'application inverse f^{-1} existe. f^{-1} est aussi bijective de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Exemple 2.10. *f_2 est bijective et sa bijection est définie par :*

$$f_2^{-1} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \frac{y-3}{5}.$$

2.2.6. *4) La composition d'application.* Soient E, F, G des ensembles et deux applications f, g telles que

$$f : E \longmapsto F, \quad g : F \longmapsto G$$
$$x \longmapsto f(x) = y \quad , y \longmapsto g(y) = z$$

On définit l'application

$$g \circ f : E \longmapsto G$$
$$x \longmapsto g \circ f(x) = z.$$

Proposition 2.11. (1) *Si f et g sont injectives $\Rightarrow g \circ f$ est injective.*
(2) *Si f et g sont surjectives $\Rightarrow g \circ f$ est surjective.*

PREUVE. (1) *Supposons que f et g sont injectives, montrons que $g \circ f$ est injective :*
$\forall x_1, x_2 \in E, g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ *puisque g est injective on aura :*

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

puisque f est injective ainsi :

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

$g \circ f$ est injective.

(2) *Supposons que f et g sont surjectives c'est à dire $f(E) = F, g(F) = G$, montrons que $g \circ f$ est surjective :*

$$g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = G$$

d'après la surjectivitée de f, g d'où le résultat.

Remarque 2.12. *Il s'ensuit que la composée de deux bijection et une bijection. En particulier, la composition de $f : E \longmapsto F$ et sa réciproque $f^{-1} : F \longmapsto E$ est l'application indentitée $Id_E, f^{-1} \circ f = Id_E, f \circ f^{-1}) = Id_F$.*

2.2.7. *c) Propriétés des applications.* Soit $f : E \longmapsto F$ on a :

(1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
(2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

PREUVE. (1) *Soit $y \in f(A)$ alors $\exists x \in A / f(x) = y$, or $A \subset B \Rightarrow x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$ d'où $f(A) \subset f(B)$.*

(2) *Soit*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B / f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A / f(x) = y \vee \exists x \in B / f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B), \end{aligned}$$

ainsi $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Soit

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B / f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in A / f(x) = y \wedge \exists x \in B / f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B), \end{aligned}$$

ainsi $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exemple 2.13. $f(x) = x^2, A = [-1, 0], B = [0, 1], A \cap B = \{0\}, f(A) = [0, 1], f(B) = [0, 1]$,

$$f(A) \cap f(B) = [0, 1],\ f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [0, 1] = f(A) \cap f(B).$$

L'égalité : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *est vérifiée lorsque* f *est injective.*

Proposition 2.14. *Soit* $f : E \longmapsto F$, $g : F \longmapsto G$ *on a :*

(1) $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective.*
(2) $g \circ f$ *est surjective, alors* g *est surjective.*
(3) $g \circ f$ *est bijective, alors* f *est injective et* g *est surjective.*

Preuve. (1) *Soit* $x_1, x_2 \in E / f(x_1) = f(x_2)$, *alors* $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ *comme* $g \circ f$ *est injective ainsi* $x_1 = x_2$ *d'où* f *est injective.*
(2) *On a* $f(E) \subset F \Rightarrow g \circ f(E) \subset g(F) \subset G$, *puisque* $g \circ f$ *est surjective , alors* $g \circ f(E) = G$, *ainsi* $G \subset g(F)$ *d'où* $G = g(F), g$ *est surjective*

3. Relations Binaires dans un ensemble

Définition 3.1. *Soient* $x \in E, y \in F$ *une relation* $\mathcal{R}$ *entre* x *et* y *est une correspondance entre* x *et* y. *Le couple* (x, y) *vérifie la relation* $\mathcal{R}$, *on note* $x\mathcal{R}y$, *si* $E = F$ *la relation est dite binaire.*

Exemple 3.2. (1) $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ *dévise* $y, \mathcal{R}$ *est une relation binaire.*
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$.
(3) $A \subset E, B \subset F, A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$.

3.1. Propriétés des relations binaires.

Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire dans l'ensemble E et $x, y, z \in E$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation

(1) **Réflexive** : $(\forall x \in E), (x\mathcal{R}x)$.
(2) **Symétrique :** $(\forall x \in E), (\forall y \in E), (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$.
(3) **Antisymétrique :**$((\forall x \in E), (\forall y \in E), ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) \Rightarrow (x = y))$.
(4) **Transitive :**$(\forall x, y, z \in E), ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.

Définition 3.3. *Une relation est dite relation déquivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Définition 3.4. *Une relation est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 3.5. (1) $\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$ *est une relation d'équivalence.*
(2) $A \subset E, B \subset F, A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ *est une relation d'ordre, en effet :*
  (a) $\forall A \subset E, A \subset A \Leftrightarrow \mathcal{R}$ *est réflexive.*
  (b) $\forall A, B \in E, ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow A = B \Leftrightarrow \mathcal{R}$ *est antisymétrique.*
  (c) $\forall A, B, C \in E, ((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow A \subset C \Leftrightarrow \mathcal{R}$ *est transitive.*

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$, *est une relation d'ordre.*

Définition 3.6. *une relation d'ordre dans un ensemble E est dite d'ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables , $\forall x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Une relation d'ordre est dite d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total.*

Exemple 3.7.

– $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$, *est une relation d'ordre total.*

  (1) $\mathcal{R}$ *est réflexive :* $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$.
  (2) $\mathcal{R}$ *est antisymétrique :* $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)) \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y$.
  (3) $\mathcal{R}$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Leftrightarrow y \leq z \Rightarrow x \leq z \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$.
  (4) $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre total car* $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq ou\ y \leq x$.

– *Soient* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$ *est une relation d'ordre partiel, en effet :* $\exists(1, 2), (3, 0) \in \mathbb{R}^2$, *et* $(1, 2)$ *n'est pas en relation avec* $(3, 0)$, *et* $(3, 0)$ *n'est pas en relation avec* $(1, 2)$.

3.2. Classe d'équivalence. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence, on appelle classe déquivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation $\mathcal{R}$ avec x on note C_x, où

$$\overline{x} = C_x = \dot{x} = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$$

Définition 3.8. *L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de E est appelée ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, il est noté $E_{/\mathcal{R}}$,*

$$E_{/\mathcal{R}} = \{\dot{x} / x \in E\}$$

Exemple 3.9. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y, \mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence car :*

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x = x^2 - x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \mathcal{R}$ *est refléxive.*
(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - y = x^2 - x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x, \mathcal{R}$ *est symétrique.*
(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \wedge y^2 - y = z^2 - z \Leftrightarrow x^2 - x = z^2 - z \Leftrightarrow z\mathcal{R}x, \mathcal{R}$ *est transitive.*

Cherchons les classes d'équivalence suivantes : $C_0, \overline{1}, \dot{2}, C_{\frac{1}{2}}$.

(1) $C_0 = \{y \in E / 0\mathcal{R}y\}, 0\mathcal{R}y \Leftrightarrow y^2 - y = 0$, *ainsi* $C_0 = \{0, 1\}$.
(2) $\overline{1} = \{y \in E / 1\mathcal{R}y\}, y^2 - y = 1 - 1 = 0$, *ainsi* $\overline{1} = \{0, 1\}$.
(3) $\dot{2} = \{y \in E / 2\mathcal{R}y\}, y^2 - y = 2$, *ainsi* $\dot{2} = \{-1, 2\}$.
(4) $C_{\frac{1}{2}} = \{y \in E / \frac{1}{2}\mathcal{R}y\}, y^2 - y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, *ainsi* $C_{\frac{1}{2}} = \{\frac{1}{2}\}$.

4. Exercices Corrigés

Exercice 7. *On considère les ensembles suivants :*
$A=\{1,2,5\}, B=\{\{1,2\},5\}, C=\{\{1,2,5\}\}, D=\{\emptyset,1,2,5\}$,
$E=\{5,1,2\}, F=\{\{1,2\},\{5\}\}, G=\{\{1,2\},\{5\},5\}, H=\{5,\{1\},\{2\}\}$.

(1) *Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?*

(2) *Déterminer* $A\cap B, G\cup H, E-G$.

(3) *Quel est le complémentaire de* A *dans* D.

Solution. (1) *On remarque* $A=E, A\subset D, E\subset D, B\subset G, F\subset G$.

(2) $A\cap B=\{5\}, G\cup H=\{5,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{5\}\}, E-G=\{1,2\}$.

(3) $C_D^A=\{\emptyset\}$.

Exercice 8. *Etant donné* A, B *et* C *trois parties d'un ensemble* E,
a) Montrer que :

(1) $(A\cap B)\cup B^c=A\cup B^c$.

(2) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

(3) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

b) Simplifier :

(1) $\overline{(A\cup B)}\cap\overline{(C\cup\overline{A})}$.

(2) $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(C\cap\overline{A})}$.

Solution. *a) Montrons que :*

(1) $(A\cap B)\cup B^c=A\cup B^c$.
Soit $x\in(A\cap B)\cup B^c\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in B^c$,

$$\begin{aligned}
x\in(A\cap B)\cup B^c &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\notin B)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\vee x\notin B)\wedge(x\in B\vee x\notin B)\\
&\Leftrightarrow x\in(A\cup B^c)\wedge x\in(B\cup B^c)\\
&\Leftrightarrow x\in(A\cup B^c)\cap E\\
&\Leftrightarrow x\in A\cup B^c.
\end{aligned}$$

Car $E=B^c\cup B$ *et* $A\cup B^c$ *est un sous ensemble se* E.

(2) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$. *Soit* $x\in(A-B)-C$ *on a :*

$$\begin{aligned}
x\in(A-B)-C &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\notin C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B^c\cap C^c)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C) \textit{Lois Morgan}\\
&\Leftrightarrow x\in A-(B\cup C).
\end{aligned}$$

(3) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cap C) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

b) Simplifions

(1) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})}$.

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})} &= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap A) \\ &= (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= \emptyset \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

(2) $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \overline{A})}$.

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \overline{A})} &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup A) \\ &= (\overline{A} \cup A) \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= E \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= E. \end{aligned}$$

Exercice 9. *Soient $E = [0, 1], F = [-1, 1]$, et $G = [0, 2]$ trois intervalles de $\mathbb{R}$. Considérons l'application f de E dans G définie par :*

$$f(x) = 2 - x,$$

et l'application g de F dans G définie par :

$$g(x) = x^2 + 1$$

(1) *Déterminer $f(\{1/2\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1, 1]), g^{-1}[0, 2])$.*

(2) *L'application f est-elle bijective ? justifier.*

(3) *L'application g est-elle bijective ? justifier.*

Solution. (1) *(a)* $f(\{1/2\}) = \{f(x) \in [0, 2]/x = 1/2\}$,
$f(1/2) = 3/2 \in [0, 2]$, *alors :*

$$f(\{1/2\}) = \{3/2\}.$$

(b) $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-1, 1]/f(x) = 0\}$.
On a $f(x) = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1, 1]$, *alors :*

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

(c) $g([-1,1]) = \{g(x) \in [0,2]/x \in [-1,1]\}$, *on a* $x \in [-1,0] \cup]0,1]$.

$$\begin{aligned} x \in [-1,0] &\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in [1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

d'où $g([-1,0]) = [1,2]$

$$\begin{aligned} x \in]0,1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 < x^2+1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in]1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

d'où $g(]0,1]) =]1,2], g([-1,1]) = [1,2]$.

(d) $g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1]/g(x) \in [0,2]\}$, *on a*

$$\begin{aligned} g(x) \in [0,2] &\Rightarrow 0 \leq x^2+1 \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow (-1 \leq x^2 < 0) \vee (0 \leq x^2 \leq 1) \end{aligned}$$

l'ingalité $(-1 \leq x^2 < 0)$ *n'a pas de solutions.*

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ainsi

$$g^{-1}([0,2]) = \emptyset \cup [-1,1] = [-1,1].$$

(2) *Comme* $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ *c'est à dire l'élément* $0 \in [0,2]$ *n'admet pas d'antécédent par* f *dans* $[-1,1]$ *donc* f *n'est pas surjetive et par suite n'est pas bijective.*

(3) *L'application* g *est paire donc* $g(-1) = g(1)$ *or* $-1 \neq 1$ *donc* g *n'est pas injective d'où* g *ne peut être bijective, aussi on remarque que* $g([-1,1]) = [1,2] \neq [0,2]$ *donc* g *n'est pas surjecive, alors n'est pas aussi bijective.*

Exercice 10. *On définit sur* $\mathbb{R}^2$ *la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x+y = x'+y'$$

(1) *Montrer que* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

(2) *Trouver la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

Solution. $\mathcal{R}$ *est une classe d'équivalence si et seulement si elle est réfléxive et symétrique et transitive.*

(1) *a)* $\mathcal{R}$ *est réfléxive si et seulement si* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

$$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow x+y = x+y\,.$$

D'où $\mathcal{R}$ est rélféxive.
b) $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathrm{I\!R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)$$

$$\begin{array}{rcl} (x,y)\mathcal{R}(x',y') & \Rightarrow & x+y = x'+y' \\ & \Rightarrow & x'+y' = x+y \\ & \Rightarrow & (x',y')\mathcal{R}(x,y) \end{array}$$

D'où $\mathcal{R}$ est symétique.
c) $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathrm{I\!R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \wedge (x',y')\mathcal{R}(x",y") \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y")$$

$$\begin{array}{rcl} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \wedge (x',y')\mathcal{R}(x",y") & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x+y = x'+y' \\ \wedge \\ x'+y' = x"+y" \end{array} \right. \\ & \Rightarrow & x+y = x"+y" \\ & \Rightarrow & (x,y)\mathcal{R}(x",y") \end{array}$$

D'où $\mathcal{R}$ est transitive, Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) *Trouvons la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

$$\begin{array}{rcl} C((0,0)) & = & \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2/(x,y)\mathcal{R}(0,0)\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2/x+y=0\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2/y=-x\} \\ & = & \{(x,-x)/x \in \mathrm{I\!R}\}. \end{array}$$

EXERCICE 11. *On définit sur $\mathrm{I\!R}^2$ la relation T par*

$$(x,y)T(x',y') \Leftrightarrow |x-x'| \leq y'-y$$

(1) *Vérfier que T est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?*
(2) *Soit $(a,b) \in \mathrm{I\!R}^2$, représenter l'ensemble $\{x,y) \in \mathrm{I\!R}^2/(x,y)T(a,b)\}$.*

SOLUTION. *T est une relation d'ordre si et seulement si elle est réfléxive et anti-symétrique et transitive.*

(1) *a) $\mathcal{R}$ est réfléxive si et seulement si* $\forall (x,y) \in \mathrm{I\!R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

$$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow |x-x| \leq y-y \Rightarrow 0 \leq 0\,.$$

D'où T est réfléxive.
b) T est anti-symétrique si et seulement si

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathrm{I\!R}^2, ((x,y)T(x',y')) \wedge ((x',y')T(x,y)) \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

$$\begin{aligned}
(x,y)T(x',y') \wedge (x',y')T(x,y) &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |x-x'| \leq y'-y \\ et \\ |x'-x| \leq y-y' \end{array}\right. \\
&\Rightarrow 2|x-x'| \leq 0 \\
&\Rightarrow |x-x'| = 0 \\
&\Rightarrow x = x' \\
&\Rightarrow y'-y \geq 0 \wedge y-y' \geq 0 \\
&\Rightarrow y'-y \geq 0 \wedge y'-y \leq 0 \\
&\Rightarrow y'-y = 0 \Rightarrow y = y'.
\end{aligned}$$

D'où $(x,y) = (x',y')$, alors T est anti-symétique.
c) T est transitive si et seulement si

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathrm{IR}^2, ((x,y)T(x',y')) \wedge ((x',y')T(x",y")) \Rightarrow (x,y)T(x",y")$$

$$\begin{aligned}
(x,y)T(x',y') \wedge (x',y')T(x",y") &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |x-x'| \leq y'-y \\ et \\ |x'-x"| \leq y"-y' \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -y'+y \leq x-x' \leq y'-y \\ et \\ -y"+y' \leq x'-x" \leq y"-y' \end{array}\right. \\
&\Rightarrow -y"+y \leq x'-x" \leq y"-y \\
&\Rightarrow |x-x"| \leq y"-y \\
&\Rightarrow (x,y)T(x",y")
\end{aligned}$$

D'où T est transitive, alors c'est un relation d'ordre.
L'ordre n'est pas total car $\exists (x,y) = (2,3)$ et $(x',y') = (4,3)$ tels que si on suppose que $(x,y)T(x',y') \Rightarrow |2-4| \leq 0$ ce qui absurde.
De plus $(x',y')T(x,y) \Rightarrow |4-2| \leq 0$ faux.

(2) *Soit $(a,b) \in \mathrm{IR}^2$, déterminons l'ensemble $\{x,y) \in \mathrm{IR}^2/(x,y)T(a,b)\}$.*

$$\begin{aligned}
(x,y)T(a,b) &\Leftrightarrow |x-a| \leq b-y \\
&\Leftrightarrow (x-a)^2 - (y-b)^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x-a)+(y-b)][(x-a)-(y-b)] \leq 0 \\
&\Leftrightarrow [(x-a+y-b) \geq 0 \wedge (x-a)-(y-b) < 0] \\
&\vee \quad [(x-a+y-b) < 0 \wedge (x-a)-(y-b) \geq 0].
\end{aligned}$$

on pose :
D_{p_1} : le demi-plan fermé d'équations $(x-y-a+b) \geq 0$.
D_{p_2} : le demi-plan ouvert d'équations $(x+y-a-b) < 0$.
D_{p_3} : le demi-plan ouvert d'équations $(x-y-a+b) < 0$.

D_{p_4} : *le demi-plan fermé d'équations* $(x+y-a-b) \geq 0$.
D'où

$$\dot{(a,b)} = \{x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y)T(a,b)\} = (D_{p_1} \cap D_{p_2}) \cup (D_{p_3} \cap D_{p_4})$$