

Series of Exercises 03 Algebraic Structure

Exercise 1 1. We provide \mathbb{R} with the internal composition law $*$ defined by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- Show that $*$ are commutative laws, not associative laws, and 1 is a neutral element of $*$.
 - Solve the following equations : $x * 2 = 5$ and $x * x = 1$
2. We provide \mathbb{R}^{+*} with the internal composition law $*$ defined by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Show that $*$ are commutative laws, associative laws, and 0 is a neutral element of $*$.
- Show that no element of \mathbb{R}^{+*} has an inverse element with $*$.

Exercise 2 Let $*$ the internal composition law defined in \mathbb{R} by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x + y + x^2 y^2$$

1. Verify $*$ are commutative laws.
2. The law $*$ is it associative ?
3. Show that \mathbb{R} have a neutral element for the law $*$ then calculate this neutral.
4. Solve the following equations : $1 * x = 1$, $2 * x = 7$

Exercise 3 Let the four functions of \mathbb{R}^* in \mathbb{R}^* :

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Show that (G, o) an abelian group (commutative group) with $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Exercise 4 Let $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ and $*$ the law in G defined by :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Show that $(G; *)$ is a commutative group.
2. Let $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Show that $(G', *)$ is a subgroup of $(G, *)$

Exercise 5 We consider on \mathbb{R} an internal composition law given by :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Show that $(\mathbb{R}, *)$ is an abelian group.

2. Let the two applications be defined of $(\mathbb{R}, *)$ in $(\mathbb{R}, +)$ by :

$$f(x) = 3x \quad \text{and} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Are these applications an homomorphism from a group $(\mathbb{R}, *)$ to a group $(\mathbb{R}, +)$?

Exercice 6 We provide $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ of two laws defined by :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Show that $(A, +)$ is an commutative group.
2. (a) Show that the law \times is commutative.
(b) Show that \times is associative.
(c) Find the neutral element of A for the law \times .
(d) Show that $(A, +, \times)$ is a commutative ring.

Série de TD 03 Les Structures Algébriques

exercice 1 1. On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.
 - Résoudre les équations suivantes : $x * 2 = 5$ et $x * x = 1$
2. On munit \mathbb{R}^{+*} de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est un élément neutre.
- Montrer que aucun élément de \mathbb{R}^{+*} n'a de symétrique pour $*$.

exercice 2 Soit $*$ la loi interne définie dans \mathbb{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x + y + x^2 y^2$$

1. Vérifier que $*$ est commutative.
2. La loi $*$ est-elle associative ?
3. Montrer que \mathbb{R} admet un élément neutre pour la loi $*$ et calculer ce neutre.
4. Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $1 * x = 1$, $2 * x = 7$

exercice 3 Soient les quatre fonctions de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^* :

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Montrer que (G, o) est un groupe abélien (commutatif) avec $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

exercice 4 Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G; *)$ est un groupe non commutatif.
2. Soit $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Montrer que $(G', *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$

exercice 5 On considère sur \mathbb{R} une loi de composition interne donnée par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ par :

$$f(x) = 3x \quad \text{et} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles des morphismes de groupes ?

exercice 6 On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif.
2. **(a)** Montrer que la loi \times est commutative.
(b) Montrer que \times est associative
(c) Déterminer l'élément neutre de A pour la loi \times .
(d) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif.