University of Badji-Mokhtar Annaba — Annaba 2023-2024
Faculty of Technologie
Computer Science Department — **Mathematical Analysis 1**

Series of exercies 4: Real-valued functions

Exercise 1:

1• Show using the definition of the limit at a point that

$$\lim_{x\to 1} 3x+3=6; \quad \lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{3x+1}=-3; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty. \quad \lim_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$$

2•Does the function $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ have a limit at $x_0=0$? Justify your answer.

Exercise 2:

Calculate the following limits

$$1)\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3};\quad 2)\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2};\quad 3)\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right);\quad 4)\lim_{x\to+\infty}\mathrm{E}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$5)\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3};\quad 6)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x;\quad 7)\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

Exercise 3:

Study the continuity of the following functions:

$$\bullet f(x)=\begin{cases}\frac{5x^2-2}{2}, & x\geq 1\\ \cos(x-1), & x\leq 1.\end{cases} \qquad \bullet g(x)=\begin{cases}x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 1\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Exercise 4:

Find the values of α and β so that the functions f and g are continuous on $\mathbb{R}$ and $h(x)$ continues at 0.

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 1\\ 3-\alpha x^2, & x\geq 1\end{cases}\quad;\quad g(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & x\leq 0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0.\end{cases}\quad;$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\in[-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \alpha, & x=0.\end{cases}$$

Exercise 5:

Do the following functions admit an extension by continuity at 0? if yes give its extension on $D_f\cup\{0\}$

$$f(x)=\frac{|x|}{x};\quad g(x)=\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|};\ h(x)=\frac{(x-1)\sin(x)}{2x^2-2}$$

Exercise 6:

I-Show that the following equations admit at least one real solution

1) $1+\sin x-x^2=0.$ on $[0,\pi]$.

2) $x^3-3x-3=0$ on $[2,3]$

II– Show that $x\mapsto\sqrt{x}$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}^+$.

Version Française

Exercice 1:

1•Montrer en utilisant la définition de la limite en un point que :

$$\lim_{x\to 1} 3x+3=6; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x-3}{3x+1}=-3; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty. \quad \lim_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$$

2• La fonction $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ possède t-elle une limite au voisinage du zéro?
Justifier votre réponse.

Exercice 2:

Calculer les limites suivantes :

$$1)\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3};\quad 2)\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2};\ 3)\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\cos\tfrac{1}{x}\right);\ 4)\lim_{x\to+\infty}\mathrm{E}\left(\tfrac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$5)\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3};\quad 6)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x;\quad 7)\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

Exercice 3:

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\bullet f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^2-2}{2}, & x\geq 1\\ \cos(x-1), & x\leq 1.\end{cases} \qquad \bullet g(x)=\begin{cases}x^n\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 1\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 4:

Trouver les valeurs de α et β pour que les fonctions f et g soient continues sur $\mathbb{R}$ et $h(x)$

continue en 0.

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 1\\ 3-\alpha x^2, & x\geq 1\end{cases}\quad;\quad g(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & x\leq 0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0.\end{cases}\quad;$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\in[-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \alpha, & x=0.\end{cases}$$

Exercice 5:

Les fonctions suivantes admettent-elles une prolongement par continuité en 0? si oui donner sa prolongement sur $D_f\cup\{0\}$:

$$f(x)=\frac{|x|}{x};\quad g(x)=\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|};\ h(x)=\frac{(x-1)\sin(x)}{2x^2-2}$$

Exercice 6:

I-Montrer que les équations suivantes admettents au moins une solutions réelle

1) $1+\sin x-x^2=0.$ dans $[0,\pi]$.

2) $x^3-3x-3=0$ dans $[2,3]$

II- Montrer que $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$