Chapitre 2:

Analyse spectrale des signaux

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER ET LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Fonction f	Fonction primitive F $(c$=constante)	Intervalle I
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x)= \frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x)= \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ (n \neq -1)$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x} + c$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x)= \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x)= -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1+ \tan^2 x = \frac{1}{\cos x}$	$F(x)= \tan x + c$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[(k \epsilon \mathrm{Z})$
$f(x) = \cos(\omega t + \varphi)(\omega \neq 0)$	$F(x)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(\omega t + \varphi)(\omega \neq 0)$	$F(x)=-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)= e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x)= \frac{1}{x}$	$F(x)= lnx + c$	$]0;+\infty[$

Séries de Fourier

$s(t)$: signal réel, périodique, de période $T = 1/f_0$ (vérifiant les conditions de Dirichlet)

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\underbrace{2\pi f_0}_{\omega} nt) + b_n \sin(\underbrace{\omega}_{2\pi f_0 = 2\pi/T} nt)]$$

Avec:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t).\cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t).\sin(2\pi n f_0 t)dt$$

wahida.handouzi@gmail.com

Séries de Fourier

- Cas particuliers:

f: $[-T/2,\ T/2] \rightarrow R$ une fonction intégrable sur $[-T/2,\ T/2]$.

Si f est paire alors: $\int_{-k}^{k} f(x)dx \ = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$

Si f est impaire alors: $\int_{-k}^{k} f(x)dx \ = 0$

Si f est développable en série de Fourrier alors:

Séries de Fourier

❑ Cas particuliers:

a) Si f est paire alors:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = 0$$

b) Si f est impaire alors:

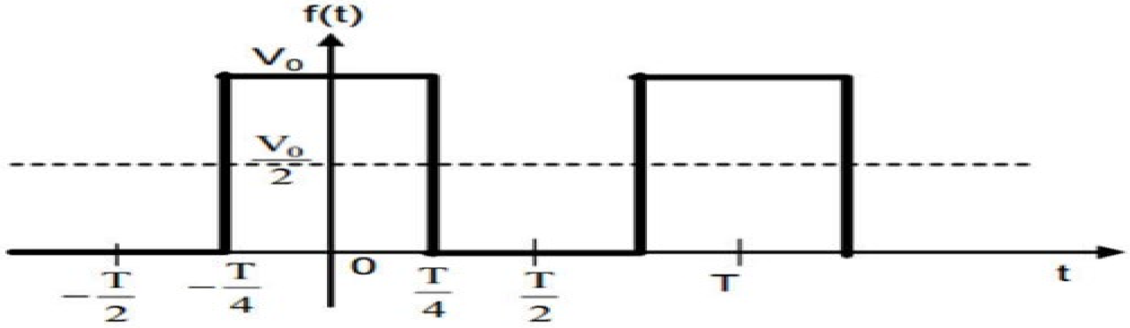
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Exemple

Soit la fonction créneau f(t) présentée sur la figure suivante.



Séries de Fourier

Calcul de a_0 : $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 dt = \frac{V_0}{T}[t]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_0}{T}\frac{2T}{4} = \frac{V_0}{2} \rightarrow \boxed{a_0 = \frac{V_0}{2}}$

Calcul de a_n : $a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 \cos(n\omega t)dt$$

$$a_n = \frac{2V_0}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$= \frac{2V_0}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} - \frac{\sin\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega}\right]$$

Séries de Fourier

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4V_0}{n\omega T}\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right) \\ &= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Si n est un nombre pair, n = 2p : $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$

Si n est un nombre impair, n = 2p + 1 : $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$

$$\boxed{a_n = \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \dfrac{2V_0}{(2p+1)\pi}(-1)^p \end{cases}}$$

Excercice N° 01 :

tracer et Développer en Série de fourier le signal périodique $x(t)$ de periode 2π défini par :

$x(t) = t \qquad -\pi < t < +\pi$

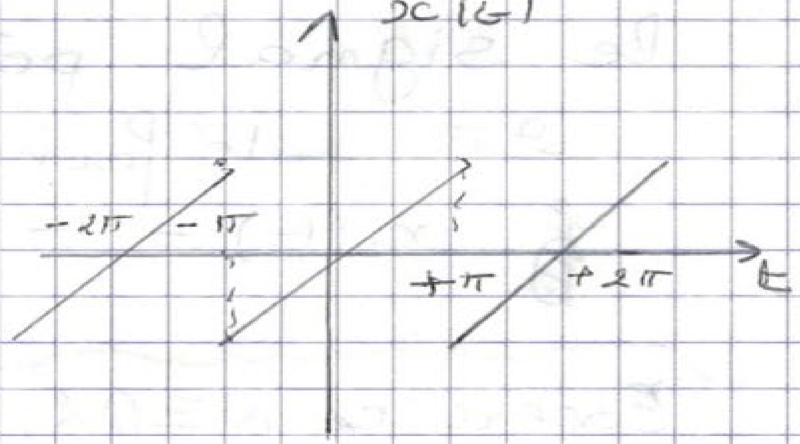
Exercice N° 01

$x(t) = t \qquad -\pi < t < +\pi$

$x(-t) = -t = -x(t)$

c'est un signal Impair

donc $a_n = 0$



fonction pair $\Rightarrow b_n = 0$

fonction Impair $\Rightarrow a_n = 0$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t.$$

$$\boxed{T = 2\pi}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T}^{+T} x(t) \sin n\omega t \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t \sin nt \, dt$$

on doit utiliser l'intégral par partie.

$U(t) = t \Rightarrow U'(t) = 1$

π $\int_{-\pi}$

on doit utiliser l'intégral par partie :

$U(t) = t \Rightarrow U'(t) = 1$.

$V'(t) = \sin nt \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{n} \cos nt$.

$$b_n = -\frac{t}{n} \cos nt \Big|_{-\pi}^{+\pi} + \cancel{\frac{1}{\pi} \sin nt \Big|_{-\pi}^{+\pi}}^{0}$$

$$b_n = -\frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{\pi}{n} \cos n\pi = -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi.$$

$$b_n = -\frac{2\pi}{n} (-1)^n = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} \sin nt$$

Transformée de Fourier

Définitions:

- Soit x une fonction continue de la variable t alors la transformée de Fourier de x est définie par :

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-i2\pi ft}\,dt$$

TF désigne la Transformée de Fourier directe.

- Soit f(t) une fonction admettant pour transformée de Fourier alors f(t) peut s'écrire :

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{i2\pi ft}\,df$$

TF^{-1} la Transformée de Fourier inverse.

Transformée de Fourier

➢ **Linéarité**

Si $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$ et $y(t) \xleftrightarrow{TF} Y(f)$ on a : $ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{TF} aX(f)+bY(f)$

➢ **Symétries :**

- Si x(t) est un signal réel, on a $X(-f) = X^*(f)$, d'où les propriété suivantes

$$\begin{cases} Re[X(-f)] = Re[X(f)] \rightarrow \text{Paire} \\ Im[X(-f)] = -Im[X(f)] \rightarrow \text{Impaire} \end{cases} \qquad \begin{cases} \|X(-f)\| = \|X(f)\| \rightarrow \text{Paire} \\ \Theta[X(-f)] = -\Theta[X(f)] \rightarrow \text{Impaire} \end{cases}$$

Exemple: $e^{-at}\,u(t)$

- Si de plus x(t) est un signal pair, alors X(f) est purement réelle

Exemple: $e^{-a|t|}$

➢ **Décalage temporel :**

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

Exemples: $\delta(t)$ et $\delta(t-t_0)$

→ Conséquence : un décalage temporel n'affecte pas le module de la T.F.

➢ **Changement d'échelle :** $x(at) \xleftrightarrow{TF} \dfrac{1}{|a|} X\left(\dfrac{f}{a}\right)$

wahida.handouzi@gmail.com

Transformée de Fourier

- **Dualité :**

  Si x(t) $\xleftrightarrow{\text{TF}}$ X(f) alors X(t) $\xleftrightarrow{\text{TF}}$ x(-f)

- **Dérivation :** $\dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{TF}} j2\pi f X(f)$

- **Intégration :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

- **Conservation de l'énergie (signaux à énergie finie) : Égalité de Parseval**

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E[X(f))] = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Transformée de Fourier

PRINCIPALES TRANSFORMÉES DE FOURIER

Dirac	$\delta(t)$	1
Constante	1	$\delta(f)$
Echelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
Exponentielle	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
Gaussienne	e^{-t^2/σ^2}	$\sigma e^{-\pi\sigma^2 f^2}$
Exponentielle complexe	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
Cosinus	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
Sinus	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$

Transformée de Fourier

Rectangle	$\mathrm{Rect}(t/T) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert < T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$T\mathrm{sinc}(Tf)$ (Sinus cardinal)
Sinus cardinal	$\mathrm{sinc}(t/T)$	$\mathrm{TRect}(fT)$
Triangle	$\mathrm{Tri}(t/T) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert & \lvert t\rvert < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$T\mathrm{sinc}^2(Tf)$
Peigne de Dirac	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-\frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\delta_{1/T}(f)$

Transformée de Fourier

Exemple:

On considère la fonction $x(t) = \mathrm{rect}(t/T)$.

Calcul de la transformée de Fourier

Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \\
&= \int_{-T/2}^{+T/2} \exp(-j2\pi f t) dt \\
&= -\frac{1}{j2\pi f} \Big[\exp(-j2\pi f t) \Big]_{-T/2}^{+T/2} \\
&= \frac{\exp(j\pi f T) - \exp(-j\pi f T)}{j2\pi f} \\
&= \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \\
&= T \mathrm{sinc}(f T).
\end{aligned}$$

En faisant : ① + ② on obtient : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

D'où : $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$

En faisant : ① - ② on obtient : $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

D'où : $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

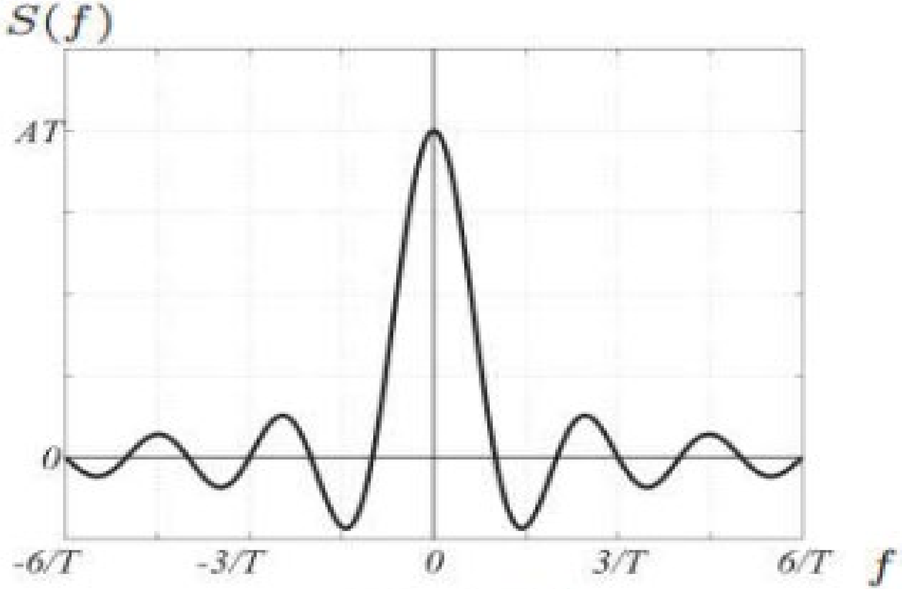
Ces deux égalités sont souvent appelées « Formules d'Euler ».

Transformée de Fourier

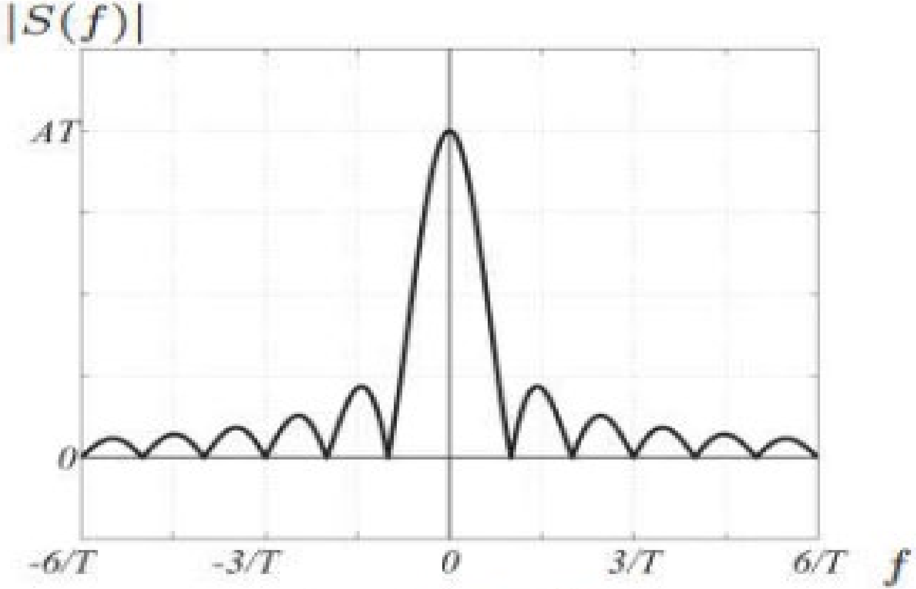
Représentation graphique du module et de la phase de $X(f)$

La TF $X(f)$ étant réelle, le module n'est autre que la valeur absolue :

$$|X(f)| = T|\text{sinc}(fT)|.$$



spectre réel
$S(f) = AT\,\text{sinc}\,(Tf).$



spectre d'amplitude
$|S(f)| = |AT\,\text{sinc}\,(Tf)|.$

Exercice 1

Soit s(t) appelée signal rectangle, défini comme suit :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & si \ \frac{-1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Calculer l'énergie et déduire la puissance moyenne de ce signal.
2. Trouver la transformée de Fourier de s(t).

Exercice 2

Soit le signal $f_2(x)$ défini ci-après :

$$f_2(x) = \begin{cases} a & si \ \frac{-b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Trouver sa transformée de Fourier $F_2(u)$.
2. Faire un tracé schématique de $F_2(u)$ dans les trois cas :
   - a = 2 et b = 1,
   - a = 1 et b = 2,
   - a = 1/2 et b = 4

Corrigé des exercices

Exercice 1

1. Calcul de l'énergie et de la puissance moyenne :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} ||s(t)||^2 dt \qquad\qquad E_s = \int_{-1/2}^{1/2} ||1||^2 dt = 1.$$

La puissance moyenne est nulle car le signal est à énergie finie.

2. $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi j \square}\ dt = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-2\pi j \square}\ dt = \frac{-1}{2j\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f})$

$$S(f) = \frac{1}{\pi f}\left(\frac{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}{2j}\right) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(\pi f)$$

Exercice 2

Considérons la fonction $f_2(x)$ définie ci-après :

$$f_2(x) = \begin{cases} a & pour -\frac{b}{2} \leq x \leq +\frac{b}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Soit $F_2(u)$ la transformée de Fourier de $f_2(x)$. Par définition :

$$F_2(u) = \mathrm{TF}(f_2(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\, e^{-j2\pi xu}\, dx$$

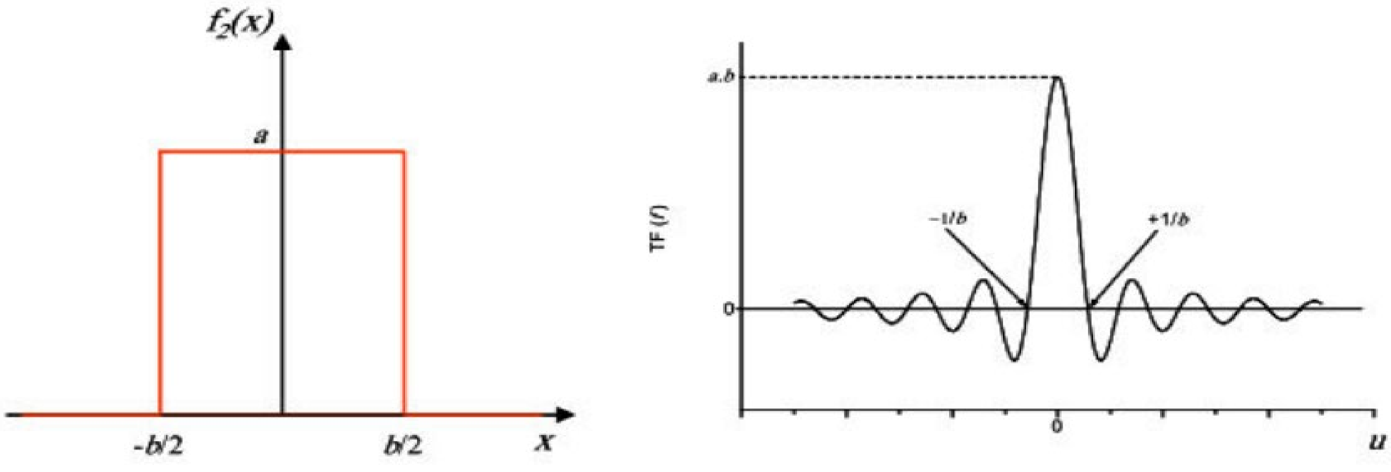
Donc

$$F_2(u) = \int_{-b/2}^{+b/2} a\, e^{-j2\pi xu}\, dx = \frac{-a}{j2\pi u}\left[e^{-j2\pi xu}\right]_{-b/2}^{+b/2}$$

$$F_2(u) = \frac{-a}{j2\pi u}\left[e^{-j\pi bu} - e^{j\pi bu}\right]$$

$$F_2(u) = \frac{a}{\pi u}\left[\frac{e^{j\pi bu} - e^{-j\pi bu}}{2j}\right] = \frac{a}{\pi u}\sin(\pi bu)$$

$$F_2(u) = \frac{ab}{\pi bu}\sin(\pi bu) = ab\,\mathrm{sinc}(\pi bu)$$



Fonction rectangle ;

sa transformée de Fourier