Processus Aléatoires - Partie1

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

April 23, 2021

Abstract

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

1 Notions de base sur les processus aléatoires

On se place sur un espace probabilisé (Ω, A, P).

1.1 Processus aléatoire

Soit $X = (X_n)_{\ n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires (v.a) définies sur l'éspace probabilisable (Ω, A) à valeurs dans un ensemble mesuré $(\mathbb{E}, \varepsilon)$. On dit que X est un processus aléatoire. La variable laéatoire X_n represente la variable observée au temps n. Afin d'introduire le déroulement du temps et la structure de l'information qui en découle, on introduit la notion importante suivante.

Le déroulement le temps et la structure d'information qui en découle sont fortement liés grace à la notion suivante:

Definition 1 *(Filtration) Une filtration de $\mathcal{A}$ est une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de sous- σ-algèbres de $\mathcal{A}$, notée $\mathbb{F}$. On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$ un espace probabilisé filtré. Pour chaque $n \in N$, la sous-σ-algèbre $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible à la date n. La croissance de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ traduit l'idée que l'information ne peut que s'accumuler au fil du temps, et qu'il n'y a pas de possibilité d'oublier des informations passées.*

un processus aléatoire se doit d'être décrit en relation avec une filtration, de la même façon qu'une variable aléatoire fait référence à une σ-algèbre.

La filtration permet de d'écrire la structure de l'information et de sa dynamique dans le temps de maniére rigoureuse.

Example 2 *Soit $X = (X_n)_{\ n\geq 0}$ un processus aléatoire de (Ω, A) dans $(\mathbb{E}, \varepsilon)$, on appele filtration naturelle de X, la filtration de A définie par:*

$\mathcal{F}_n^X \quad := \ \sigma(X_i \ , i \leq n), \, n \geq 0,$

Conditions habituelles

Une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$satisfait les conditions habituelles si elle complète et continue à droite .

Soit N la classe des ensembles $F-$négligeables de F_∞, la filtration(F_t) est dite complète si $N \subset F_0$, notons que $F_\infty = \sigma\,(X_{s;s\geq 0})$ est la sous tribu de F engendrée par les $(X_{s;s\geq 0})$, la filtration (F_t) est dite continue à droite si $F_t = \underset{s \succ t}{\cap} F_s, \forall t \geq 0$.

Definition 3 *Soit* $X = (X_n)\ _{n\geq 0}$ *un processus aléatoire, et* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*une filtration de* $\mathcal{A}$*. On dit que*

- X *est* $\mathbb{F}$*-adapté si* X_n *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable pour tout* $n \geq 0$*,*
- X *est* $\mathbb{F}$*-prévisible si* X_n *est* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mesurable pour tout* $n \geq 0$*, où* $\mathcal{F}_{-1} := \{\phi, \Omega\}$*.*

1.2 Temps d'arrêt

1.2.1 Motivation

La notion de temps d'arrêt joue un rôle crucial dans la théorie des processus aléatoires. C'est la vraie notion de temps aussi bien pour les développements mathématiques que pour la modélisation. Les prises de décision en présence d'une structure d'information doivent prendre en considération l'information disponible à la date courante, et les seuls temps alétoires qui sont perceptibles par un agent, dont la structure d'information est décrite par une filtration $\mathbb{F}$, sont les temps d'arrêt.

Definition 4 *Un temps d'arrêt* υ *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *telle que*

$$\{\upsilon = n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

L'ensemble des temps d'arrêt est noté par $\mathcal{T}$.

Remark 5 *la variable aléatoire* υ *est un temps d'arrêt si et seulement si*

$$\{\upsilon \leq n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

La généralisation de la notion de temps d'arrêt au temps continu est basée sur cette definiton équivalente.

Proposition 6 *Soit $X = (X_n)_{\ n\geq 0}$ un processus $\mathbb{F}$-adapté a valeurs dans (E, ε)*

Pour tout $A \in \varepsilon$, on définit le premier temps d'atteinte :

$$T_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \ ,$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Alors T_A est un temps d'arrêt.

Proof. Pour tout $n \geq 0, k \leq n$, on a $(X_k)^{-1}(A) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ fait que X est $\mathbb{F}$-adapté. On déduit alors que $\{T_A \leq n\} = \cup_{k \leq n}\{X_k \ \in A\} = \cup_{k \leq n}(X_k)^{-1}(A)$ $\in \mathcal{F}_n$. ■

Donnons maintenant les propriété de stabilité élémentaires des temps d'arrêt.

Proposition 7 (i) *Soient τ et θ deux temps d'arrêt. Alors $\tau \wedge \theta$, $\tau \vee \theta$, $\tau \wedge \theta$ sont des temps d'arrêt.*

(ii) Soient τ un temps d'arrêt, et $c \geq 0$ une constante. Alors $\tau + c$ *et* $(1 + c)\tau$

sont des temps d'arrêt.

(iii) Soit $(\tau_n)_{n\geq 0}$ une suite de temps d'arrêt. Alors $\liminf_n \tau_n$ et $\limsup_n \tau_n$

sont des temps d'arrêt.

Proof. Exercice (voir exercices-temps d'arrêt) □

■

Proposition 8 *Soient $\{X_n, n \geq 0\}$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace mesuré (E, ε), et τ un temps d'arrêt. Alors, la fonction aléatoire*

$$X_\tau : \omega \in \Omega \longmapsto X_{\tau}(\omega)(\omega)$$

est une variable aléatoire.

Proof. Pour voir que X_τ est $\mathcal{A}$-mesurable, on écrit que pour tout $A \in \varepsilon$, ■

$$(X_k)^{-1}(A) = \cup_{k\geq 0}[\{\tau = k\} \cap (X_k)^{-1}(A)]$$

et on remarque que pour tout $k \geq 0$, les événements $\{\tau = k\}$, $(X_k)^{-1}(A)$ sont dans $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{A}$, leur intersection est donc dans $\mathcal{A}$. Par suite $(X_k)^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ comme union dénombrable d'éléments de la σ-algèbre $\mathcal{A}$. □

1.2.2 Conditionnement et information à un temps d'arrêt

On définit à présente l'information disponible à un temps d'arrêt. Ceci conduit naturellement à la notion suivante :

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \quad : \quad A \cap \{\tau = k\}\} \in \mathcal{F}_n \ \text{ pour tout } n \geq 0\} \ ,$$

i.e. l'ensemble des événements qui, si le temps d'arrêt vaut n, sont dans l'ensemble d'information de la date n. Il est clair que si $\tau = n \in \mathbb{N}$ est déterministe, alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$ définit bien une σ-algèbre. Ceci reste vrai grâce à la notion de temps d'arrêt.

Proposition 9 *Pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}$, $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{A}$ est une sous- σ-algèbre de $\mathcal{A}$. Si X est un processus aléatoire $\mathbb{F}$-adapté, X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable*

Proof. ***1-*** *Il est clair que $\emptyset \in F_\tau$. Si $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $A^c \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \setminus (A \cap \{\tau = n\}\ ) = \{\tau = n\} \cap (A \cap \{\tau = n\})^c \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$, i.e. $A^c \in \mathcal{F}_n$. Si $(A_i)_i \subset \mathcal{F}_\tau$, alors $(\cup_i A_i) \cap \{\tau = n\} = (\cup_i (A_i \cap \{\tau = n\}) \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$, i.e. $\cup_i A_i \in \mathcal{F}_\tau$. Ainsi $\mathcal{F}_\tau$ est une σ-algèbre.* ■

2- On vérifie que $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Exercise 10 *Pour un temps d'arrêt τ et un événement $A \in \mathcal{F}_\tau$, on définit*

$$\tau_A := \tau 1_A + \infty 1_{A^c}.$$

Montrer que τ_A est un temps d'arrêt.

Propriétés

Pour un temps d'arrêt τ, on peut définir la notion d'éspérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_\tau$ satisfaisant les conditions habituelles.

La propriété des projections itérées de l'espérance conditionnelle est généralisée au cadre des temps d'arrêt:

Proposition 11 *Soient τ et θ deux temps d'arrêt. Alors,$\{\tau \leq \theta\}, \{\tau \geq \theta\}$ et $\{\tau = \theta\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$, et pour toute v.a. X intégrable, on a*

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\theta\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\theta]|\mathcal{F}_\tau\} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}]$$

Proof. Pour tout $n \geq 0$, on a $\{\tau \leq \theta\} \cap \{\tau = n\} = \{\theta \geq n\} \cap \{\tau = n\} = \{\theta < n\}^c \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, prouvant que $\{\tau \leq \theta\} \in \mathcal{F}_\tau$. Par un argument similaire, on montre aussi que $\{\tau \leq \theta\} \in \mathcal{F}_\theta$. ■

Pour la propriété d'espérance conditionnelle, il suffit de montrer pour une varailbel aléatoire positive X que $\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\theta\} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}] =: \xi$. En effet, pour tout $A \in \mathcal{F}_\theta$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi 1_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}]1_A 1_{\tau>\theta}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \sum_{i\geq 0}\sum_{j<i} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_j]1_A] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \sum_{i\geq 0}\sum_{j<i} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_i]1_A] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau>\theta}]
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A]$$

$\square$

Exercise 12 *Soient*$(X_n)_{n\geq 0}$ *un processus aléatoire* $\mathbb{F}$*-adapté dans* $\mathbb{R}$*, et* τ *un temps d'arrêt. On suppose* $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$*. Alors*

$$\mathbb{V}ar[X_\tau] = \mathbb{E}\{\mathbb{V}ar[X|\mathcal{F}_\tau]\} + \mathbb{V}ar\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]\}.$$

:

1.3