Série de TD 03
Les Structures Algèbriques

Exercice 1 *1. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- *Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.*
- *Résoudre les équations suivantes : $x * 2 = 5$ et $x * x = 1$*

2. On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- *Montrer que $*$est commutative, associative, et que0 est un élément neutre.*
- *Montrer que aucun élément de $\mathbb{R}^{+*}$ n'a de symétrique pour $*$.*

Exercice 2 *Soit $*$ la loi interne définie dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + x^2y^2$$

1. *Vérifier que $*$ est commutative.*
2. *La loi $*$ est-elle associative ?*
3. *Montrer que $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour la loi $*$ et calculer ce neutre.*
4. *Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R} : 1 * x = 1 \quad , 2 * x = 7$*

Exercice 3 *Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$:*

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Montrer que (G, o) est un groupe abélien (commutatif) avec $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Exercice 4 *Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :*

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. *Montrer que $(G; *)$ est un groupe non commutatif.*
2. *Soit $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Montrer que $(G', *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$*

Exercice 5 *On considère sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne donnée par :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.*

2. *Soit les deux applications définies de* $(\mathbb{R}, *)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$ *par :*

$$f(x) = 3x \quad et \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles des morphismes de groupes ?

Exercice 6 *On munit* $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *de deux lois définies par :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad et \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. *Montrer que* $(A, +)$ *est un groupe commutatif.*
2. ***(a)*** *Montrer que la loi* $\times$ *est commutative.*
   (b) *Montrer que* $\times$ *est associative*
   (c) *Déterminer l'élément neutre de* A *pour la loi* $\times$ *.*
   (d) *Montrer que* $(A, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

Corrigé Série de TD 03

Corrigé exercice 1 *1. On a :* $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$

a) *Montrons que* $*$ *est commutative, non associative, et que* 1 *est un élément neutre.*

— *Montrons que* $*$ *est commutative :*
On a :$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y * x$
donc, la loi $*$ *est commutative.*

— *Montrons que* $*$ *n'est pas associative :*
Prenons $x = 0, y = 2, Z = 3$*, on a :*

$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = (-3) * 3 = 55$$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * 30 = -899$$

donc : la loi $*$ *n'est pas associative.*

— *Montrons que* 1 *est l'élément neutre : On a :* $1 * x = 1 \times x + (1^2-1)(x^2-1) = x$
De plus comme la loi est commutative $x * 1 = 1 * x = x$
donc : 1 *est l'élément neutre.*

b) *Résolvons les équations suivantes :*

— $x * 2 = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2-1) = 5 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$
donc : $x_1 = -2$ *et* $x_2 = \frac{4}{3}$

— $x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2-1)^2 = 1 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$
donc : $x_1 = 0, x_2 = -1$ *et* $x_3 = 1$

2. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) *Montrons que* $*$ *est commutative, associative, et que*0 *est un élément neutre :*

— *La loi* $*$ *commutative :*

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

donc : la loi $*$ *est commutative.*

— *La loi* $*$ *associative :*

$$(x * y) * Z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * Z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 * Z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$

$$x * (y * Z) = x * \sqrt{y^2 + Z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$$

donc : la loi $*$ *est associative.*

— *On a :* $x * 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x| = x$ *car* $x \succ 0$
comme $*$ *est commutative, alors :* $x * 0 = 0 * x = x$
donc : 0 *est l'élément neutre.*

b) *Montrons que aucun élément de* $\mathbb{R}^{+*}$ *n'a de symétrique pour* $*$ *:*
Supposons que x *admette un symétrique* x'*, alors :*

$$x * x' = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x'^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x'^2 = 0 \Leftrightarrow x = x' = 0 \quad \text{or} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad x' > 0$$

donc : $x * x' = 0$ *est impossible, pour tout* $x > 0$*, donc* x *n'a pas de symétrique.*

Corrigé exercice 2 *On a :* $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + x^2y^2$

1. Vérifions que $*$ *est commutative :*
$x * y = x + y + x^2y^2 = y + x + y^2x^2 = y * x$
donc : la loi $*$ *est commutative.*

2. *Prenons :* $x = 1, y = 2, z = 3$
   $(x * y) * z = (1 * 2) * 3 = 7 * 3 = 451$
   $x * (y * z) = 1 * (2 * 3) = 1 * 41 = 1723$
   donc : la loi $*$ *n'est pas associative.*

3. *Montrons que* $\mathbb{R}$ *admet un élément neutre pour la loi* $*$ *et calculons ce neutre :*
   $x * e = x \Leftrightarrow x + e + x^2e^2 = x$
   donc : $e(1 + ex^2) = 0 \Rightarrow e = 0, e = \dfrac{-1}{x^2}$ *on a :*$x * 0 = x$
   et comme l'élément neutre est unique alors : $e = 0$

4. *Résolvons les équations suivantes :*
   $1 * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$
   $2 * x = 7 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{-5}{4}$

Corrigé exercice 3 *On a :* $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *avec :* $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$
Montrons que (G, o) *est un groupe abélien :*

1. *On a :*

o	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_3	f_1

   On remarque que la loi o est interne.

$$\forall f_i, f_j \in G \quad on\ a: \quad f_i \circ f_j \in G$$

2. *La loi o est associative :*

$$\forall f_i, f_j, f_k \in G \quad on\ a: \quad (f_i \circ f_j) \circ f_k = f_i \circ (f_j \circ f_k)$$

3. f_1 *est l'élément neutre pour cette loi (d'après le tableau).*

4. *chaque élément admet un élément symétrique qui est lui même.*

5. *Cette loi est commutative.*
   On déduit que (G, o) *est un groupe abélien.*

Corrigé exercice 4 *Soit* $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *et* $*$ *la loi dans* G *définie par :*

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. *Montrons que* $(G; *)$ *est un groupe non commutatif :*
   a) *Comme* $x \neq 0$ *et* $x' \neq 0$ *alors :* $xx' \neq 0$ *donc :* $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
   donc : la loi $*$ *est une loi interne.*
   b) *On a :*

$$\begin{aligned}
[(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\
&= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \\
(x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') \\
&= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)
\end{aligned}$$

   donc : la loi $*$ *est associative.*

c) *Soit* $(a,b)\in G$ *tel que pour tout* $(x,y)\in G$ *on a :*

$$(x,y)*(a,b)=(x,y)\Leftrightarrow(ax,ay+b)=(x,y)$$

donc :

$$\begin{cases} ax=x\Rightarrow a=1\\ ay+b=y\Rightarrow b=0\end{cases}$$

alors : $(1,0)$ *est l'élément neutre.*

d) *Soit* $(x,y)\in G$ *on cherche* $(x',y')\in G$ *tel que :*

$$(x,y)*(x',y')=(1,0)\Leftrightarrow(xx',xy'+y)=(1,0)$$

donc :

$$\begin{cases} xx'=1\Rightarrow x'=\dfrac{1}{x}\neq 0\\ xy'+y=0\Rightarrow y'=\dfrac{-y}{x}\end{cases}$$

alors, le symétrique de (x,y) *est* $(\frac{1}{x},\frac{-y}{x})$

donc : $(G,*)$ *est un groupe.*

e) *Comme :* $(1,2)*(2,0)=(2,2)$ *et* $(2,0)*(1,2)=(2,4)$ *il est claire que ce groupe n'est pas commutatif.*

2. *Soit* $G'=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$*, Montrons que* $(G',*)$ *est un sous-groupe de* $(G,*)$ *:*
   G' *sous groupe de* G *si et seulement si :*

$$\begin{cases} a)\quad G'\neq\emptyset\Leftrightarrow e\in G'\\ b)\quad \forall x,y\in G'\Rightarrow x*y^{-1}\in G'\end{cases}$$

a) *L'élément neutre* $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}=G'$*, alors :* $G'\neq\emptyset$

b) *Soit* $(x,y)\in G'$ *et* $(x',y')\in G'$ *alors :*

$$(x,y)*(x'^{-1},y'^{-1})=(x,y)*(\frac{1}{x'},\frac{-y'}{x'})=(\frac{x}{x'},\frac{-xy'+x'y}{x'})\in G'$$

comme $\frac{x}{x'}>0$*. alors :* $(x,y)*(x'^{-1},y'^{-1})\in G'$

donc : $(G',*)$ *est un sous groupe de* $(G,*)$

Corrigé exercice 5 *On considère sur* $\mathbb{R}$ *une loi de composition interne donnée par :*

$$\forall a,b\in\mathbb{R}:\quad a*b=a+b+\frac{1}{6}.$$

1. *Montrons que* $(\mathbb{R},*)$ *est un groupe abélien.*

a) ***La commutativité :***

$$a*b=a+b+\frac{1}{6}=b+a+\frac{1}{6}=b*a$$

d'où la loi $*$ *est commutative.*

b) ***L'associativité :***

$$(a*b)*c=(a+b+\frac{1}{6})*c=a+b+\frac{1}{6}+c+\frac{1}{6}=a+b+c+\frac{1}{3}$$

$$a*(b*c)=a*(b+c+\frac{1}{6})=a+b+c+\frac{1}{3}$$

d'où $*$ *est associative.*

c) *On a :* $a * e = e * a = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = \frac{-1}{6} \in \mathbb{R}$
d'où l'élément neutre est $e = \frac{-1}{6}$

d) $a * a' = a' * a = e \Leftrightarrow a + a' + \frac{1}{6} = \frac{-1}{6} \Rightarrow a' = \frac{-1}{3} - a \in \mathbb{R}$ *donc chaque élément* $a \in \mathbb{R}$ *admet un élément symétrique* $a' = \frac{-1}{3} - a \in \mathbb{R}$
on déduit que $(\mathbb{R}, *)$ *est un groupe abélien.*

2. *Soit les deux applications définies de* $(\mathbb{R}, *)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$ *par :*

$$f(x) = 3x \quad \textit{et} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

a) $f : (\mathbb{R}, *) \to (\mathbb{R}, +)$ *est morphisme de groupe si et seulement si :*$f(x*y) = f(x)+f(y)$
On a :

$$f(x * y) = 3(x * y) = 3(x + y + \frac{1}{6}) = 3x + 3y + \frac{1}{2}$$

$$f(x) + f(y) = 3x + 3y$$

donc :f *n'est pas un morphisme de groupe.*

b) *On a :*$g(x * y) = 3(x * y) + \frac{1}{2} = 3x + 3y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1$
et : $g(x) + g(y) = 3x + \frac{1}{2} + 3y + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1$
alors, g *est un morphisme de groupe.*