Master 1 IATI 2017/2018
Introduction à l'intelligence Artificielle
Chargé Module : Dr Djebbar Akila

Chapitre 2 : La logique propositionnelle et la logique des prédicats

Introduction

La logique a été utilisée dans l'IA à plusieurs endroits :

- Utiliser des expressions logiques pour représenter des faits et des connaissances.
- Utiliser la logique pour inférer des connaissances des conclusions.

Nous présentons d'abord le calcul propositionnel, et nous introduirons des définitions et des notions sur lesquelles nous reviendrons pour l'étude du calcul des prédicats, en ajoutant la notion de quantification.

Objectifs :

- Traiter formellement les notions de vérité et fausseté.
- Formaliser le raisonnement logique et la déduction logique
- La logique propositionnelle et la logique d'ordre 1 (la logique des prédicats)

Partie I- La logique propositionnelle (ORDRE 0)

En logique, toute connaissance est représentée par une formule construite selon une syntaxe précise. Une base de connaissances est alors constituée exclusivement d'un ensemble de formules décrivant l'univers du discours.

Définition de la logique propositionnelle

- La *logique propositionnelle* est la composante la plus simple de la logique classique. Les objets de cette logique, c'est à dire les éléments de son langage, sont des énoncés susceptibles d'être soit vrais, soit faux, et construits par composition à partir d'énoncés de base.

- La logique des propositions est un langage formel constitue d'une syntaxe et d'une sémantique.
- La syntaxe décrit l'ensemble des formules qui appartiennent au langage.
- La sémantique permet de donner un sens aux formules du langage.

Il existe plusieurs types de représentation des connaissances Le choix d'une représentation dépend de l'attitude du concepteur vis-à-vis des relations entre les fragments de connaissances.
Dans ces catégories, les représentations les plus utilisées sont listées ci-dessous :

Domaines d'application

- Intelligence artificielle
- Systèmes experts, Systèmes d'aides la décision
- Programmation des Jeux
- Techniques de représentations de connaissances
- Traduction formelle et interprétation des langages naturel

HISTORIQUE

1930	Calcul des prédicats (J. Herbrand)
1965	Principe de résolution (J. A. Robinson)
1970	Utiliser la logique comme langage de programmation clauses de Horn — R. Kowalski Q-systèmes — A. Colmerauer
1972	Premier interpréteur PROLOG (A. Colmerauer et P. Roussel) Université d'Aix-Marseille
1977	Premier compilateur PROLOG (D. H. D. Warren) Université d'Édimbourg
1990	PROLOG évolue vers la Programmation par Contraintes
>1990	Programmation des Systèmes Experts

Olfa MOUELHI - Mohamed Heny SELMI

esprit

QU'EST-CE QU'UNE PROPOSITION ?

✓ **Une connaissance qui est vraie ou fausse!**

Exemple :

- il pleut	**p1**
- il fait beau	**p2**
- après le repas, je tonds la pelouse	**p3**
- Il y a un bon film à la télévision ce soir	**p4**

✓ **Chacun de ces énoncés est représenté une proposition.**

✓ **On nomme chaque proposition élémentaire.**

→ Construire de nouvelles propositions à partir de celles qui existent en ajoutant des connecteurs :

-Il pleut et il y a un bon film à la télévision ce soir:

$$p1 \wedge p4$$

-Je ne tonds pas la pelouse après le repas:

$$\neg p3$$

-Il pleut si et seulement si il ne fait pas beau:

$$p1 \leftrightarrow \neg p2$$

DÉFINITION

- ✓ Etude scientifique des conditions de vérités de proposition.
- ✓ Manière basique et simple de raisonner.
- ✓ Enchainement cohérent d'idées.

OBJECTIFS

Comment écrire les formules ?

- Aspects syntaxiques

modéliser

Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ?

- Aspects sémantiques

interpréter

Comment démontrer de nouveaux résultats ?

- Aspects déductifs

Raisonner

SYNTAXE DU LANGAGE

Vocabulaire

- un ensemble de variables propositionnelles(atomes)

  { p, q, r, … } énoncés élémentaires
- un ensemble de connecteurs

  $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- Ensemble de délimiteurs

  {(,)}

Formules bien formée (fbf)

- **p** est une fbf
- **¬ (H)** est une formule si **H** est une fbf
- **$(H \wedge K)$, $(H \vee K)$, $(H \rightarrow K)$ et $(H \leftrightarrow K)$** sont des fbf si **H** et **K** sont des fbf

PRIORITÉ DES CONNECTEURS ET PARENTHÈSES

- ✓ On utilise les parenthèses pour éviter les ambigüités de lecture.
- ✓ Priorité décroissante des connecteurs dans l'ordre:

  $\neg \Rightarrow \wedge \Rightarrow \vee \Rightarrow \rightarrow \Rightarrow \leftrightarrow$

- ✓ Quand il y'a un seul connecteur l'association se fait de gauche à droite

Exemples:

1) $P \vee \neg Q \wedge \neg R \Rightarrow (P \vee ((\neg Q) \wedge (\neg R)))$
2) $P \rightarrow Q \vee R \Rightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$
3) $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \Rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow S)$

SÉMANTIQUE D'UNE FORMULE

Logique bi-valuée

- fausse (**F**)
- vraie (**V**)

Notion d'interprétation

- donner une <u>valeur de vérité</u> à une variable

$$\delta(p) \in \{V, F\} ou \{O,1\}$$

- Pour <u>n atomes</u> → 2^n interprétations

TABLES DE VÉRITÉ : OPÉRATEURS

p	$\neg p$
F	V
V	F

$\wedge$	F	V
F	F	F
V	F	V

$\vee$	F	V
F	F	V
V	V	V

$\rightarrow$	F	V
F	V	V
V	F	V

$\leftrightarrow$	F	V
F	V	F
V	F	V

FORMULES PARTICULIÈRES

Tautologie (valide) : formule toujours vraie

- Toutes les interprétations ne contiennent que des V
- exemple : p $\vee \neg$ p

p	$(\neg p)$	$(p \vee \neg p)$
F	V	V
V	F	V

$\vee$	F	V
F	F	V
V	V	V

toutes les interprétations sont évaluées à **VRAIE**

$$A : \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

est-elle **valide**?

p	q	¬ p	¬ q	p ∧ q	¬ (p ∧ q)	(¬ p ∨ ¬ q)	A
F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V

∧	F	V
F	F	F
V	F	V

∨	F	V
F	F	V
V	V	V

↔	F	V
F	V	F
V	F	V

VALIDE, INVALIDE, INCONSISTANTE, CONSISTANTE ???

F	F
F	F
F	V
F	F

V
V
F
F

V	V
F	V
V	V
V	V

FORMULES ÉQUIVALENTES

Formules tautologiquement équivalentes

- les tables de vérité sont les mêmes

$$\forall \delta, \quad \delta(A) = \delta(B)$$

- Condition nécessaire et suffisante :

  (A) ↔ (B) est une tautologie

A↔B
V
V
V
V
V
V
V

EQUIVALENTES

FORMULES ÉQUIVALENTES UTILES

$A \vee \neg A = V$ **(loi du tiers exclu)**

$A \wedge \neg A = F$

$A \vee F = A$

$A \wedge V = A$

$A \vee V = V$

$A \wedge F = F$

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$ **(double négation)**

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$A \vee A \Leftrightarrow A \wedge A \Leftrightarrow A$ **(idempotence)**

FORMULES PARTICULIÈRES

Lois de Morgan :

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- Distributivité
  - $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
  - $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
- Commutativité
  - $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
  - $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- Associativité
  - $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
  - $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- Contraposée
  - $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

EXERCICE D'APPLICATION :

Développer la négation en appliquant les lois de Morgan:

a) $(\neg(A \wedge (B \vee C)))$

b) $(\neg[(\neg(A \wedge B) \vee (\neg D)) \wedge E \vee F]$

c) $(\neg((\neg A) \wedge B \wedge ((\neg C) \vee D) \vee (\neg E) \wedge F \wedge (\neg G)))$

d) $(\neg(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ([\neg(\neg D)] \vee (\neg E)) \vee (\neg F) \wedge G)$

FORMES NORMALES

But:

- **avoir une représentation uniforme des formules du calcul propositionnel**
- **limiter le nombre de connecteurs différents utilisés**

FORMES NORMALES

FN CONJONCTIVES	FN DISJONCTIVES
$\bigwedge(\vee, \neg)$	$\bigvee(\wedge, \neg)$

FORMES NORMALES

Une formule F est dite sous **Forme Normale Disjonctive** ssi F est une *disjonction de conjonctions* de variables propositionnelles et de leur négation $\bigvee \bigwedge$

Toute formule du calcul propositionnel est tautologiquement équivalente à une formule sous forme normale disjonctive

Une formule F est dite sous **Forme Normale Conjonctive** ssi F est une *conjonction de disjonctions* de variables propositionnelles et de leur négation $\bigwedge \bigvee$

Toute formule du calcul propositionnel est tautologiquement équivalente à une formule sous forme normale conjonctive

exercice

- Mettre sous forme DNF :
  - $\neg(a \vee b \rightarrow c)$
  - $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
  - $\neg((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S))$

<u>Début</u>

- <u>Elimination des connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$</u>

  Remplacer $A \rightarrow B$ par $\neg A \vee B$

  $A \leftrightarrow B$ par $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

- <u>Application des lois de Morgan</u>

  Remplacer $\neg(A \vee B)$ par $\neg A \wedge \neg B$

  $\neg(A \wedge B)$ par $\neg A \vee \neg B$

- <u>Elimination des doubles négations</u> $\neg\neg A$ par A

- <u>Application des règles de distributivité</u>

  $A \vee (B \wedge C)$ par $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

  $(A \wedge B) \vee C$ par $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

<u>Fin</u>

ASPECTS DÉDUCTIFS

- NOTION DE CONSÉQUENCE LOGIQUE
- NOTION DE RAISONNEMENT

- Est -ce que ψ est une conséquence logique de ϕ?
  - $\phi = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$, $\quad \psi = q \wedge r$
  - $\phi = (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$, $\quad \psi = \neg p$

***G** est une conséquence logique de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ssi*

$(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$ est une tautologie

OU

***G** est une conséquence logique de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ssi*

$(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \wedge \neg G$ est inconsistante

Notion de réfutation : démonstration par l'absurde

EXERCICE D'APPLICATION:

Considérons les arguments suivants:

« Si Didier est l'auteur de ce bruit, il est stupide ou dépourvu de principes. Didier n'est ni stupide ni dépourvu de principes. Donc Didier n'est pas l'auteur de ce bruit. »

D : « Didier est l'auteur de ce bruit »
S : « Didier est stupide »
P : « Didier est dépourvu de principes »

H1 : « Si Didier est l'auteur de ce bruit, il est stupide ou dépourvu de principes »

$$(D \rightarrow (S \vee P))$$

H2 : « Didier n'est pas stupide »

$$\neg S$$

H3 : « Didier n'est pas dépourvu de principes »

$$\neg P$$

C : « Didier n'est pas l'auteur de ce bruit »

$$\neg D$$

La table de vérité nous permet de vérifier aisément l'assertion:

D	S	P	$H_1 : (D \rightarrow (L \vee P))$	$H_2 : \neg S$	$H_3 : \neg P$	$C : \neg D$
faux	faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai
faux	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai
vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux
vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	faux
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	faux

Vérifier si **?**

C est une conséquence logique de **H1, H2 et H3**

Olfa MOUELHI - Mohamed Heny SELMI

esprit

Exercice :

Soit l'interprétation *I* définie comme : *I*(p) = v ; *I*(q) = f ; *I*(r) = v.

1. Donner l'interprétation selon *I* des formules

- $p \wedge q$
- $p \wedge (\neg r \vee q)$
- $p \vee \neg p$
- $p \Rightarrow q$
- $q \Rightarrow p$

2. Même question avec l'interprétation *J* : *J*(p) = f ; *J*(q) = v ; *J*(r) = f.
3. Pouvez-vous trouver une interprétation *K* qui rende les trois formules vraies ?

Solutions :

1/

$I(p) = v$;

$I(q) = f$;

$I(r) = v$.

$I(\underbrace{\underset{v}{p} \wedge \underset{f}{q}}_{f})$ $\qquad$ $I(\underbrace{\underset{v}{p} \vee \underset{f}{\neg p}}_{v})$ $\qquad$ $I(\underbrace{\underset{v}{p} \wedge (\underbrace{\underset{f}{\neg r} \vee \underset{f}{q}}_{f})}_{f})$

$I(\underbrace{\underset{v}{p} \Rightarrow \underset{f}{q}}_{f})$ $\qquad$ $I(\underbrace{\underset{f}{q} \Rightarrow \underset{v}{p}}_{v})$

2/

$J(p) = f$;

$J(q) = v$;

$J(r) = f$.

$J(\underbrace{\underset{f}{p} \wedge \underset{v}{q}}_{f})$ $\qquad$ $J(\underbrace{\underset{f}{p} \vee \underset{v}{\neg p}}_{v})$ $\qquad$ $J(\underbrace{\underset{f}{p} \wedge (\underbrace{\underset{v}{\neg r} \vee \underset{v}{q}}_{v})}_{f})$

$J(\underbrace{\underset{f}{p} \Rightarrow \underset{v}{q}}_{v})$ $\qquad$ $J(\underbrace{\underset{v}{q} \Rightarrow \underset{f}{p}}_{f})$

Logique propositionnelle : limites

L'hypothèse est que tout peut être exprimé par des faits simples.

L'exemple de Socrate ne peut être traduit en logique propositionnelle. En effet, l'énoncé en question fait intervenir une *variable quantifiée* « homme » et le pluriel « les hommes sont mortels » indique l'universalité : « Tout *x* qui a la propriété *homme* est *mortel* ». Pour traduire cela, le système formel doit être plus riche que la logique propositionnelle.

Partie II- La logique des prédicats (d’ordre 1)

esprit

1. LOGIQUE DES PROPOSITIONS (LOGIQUE D’ORDRE 0)

2. LOGIQUE DES PREDICATS (LOGIQUE D’ORDRE 1)

esprit

OBJECTIFS

Comment écrire les formules ?

✓Aspects syntaxiques — modéliser

Comment déterminer la valeur de vérité d’une formule ?

✓Aspects sémantiques — interpréter

Comment démontrer de nouveaux résultats ?

✓Aspects déductifs — Raisonner

esprit

LIMITES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

LP0

- ✓ tous les étudiants n'habitent pas à Tunis ⟹ A
- ✓ tous les étudiants n'habitent pas à Sfax ⟹ B

esprit

LIMITES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

LP0

- ✓ tous les étudiants n'habitent pas à Tunis ⟹ ~~A~~
- ✓ tous les étudiants n'habitent pas à Sfax ⟹ ~~B~~

Peut-on faire mieux ?

⬇

LP1

LIMITES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

tous **les étudiants** n'habitent pas à Tunis
tous **les étudiants** n'habitent pas à Sfax

Variables Universelles

LIMITES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

tous les étudiants n'**habitent** pas à Tunis
tous les étudiants n'**habitent** pas à Sfax

Relation: prédicat

LIMITES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

tous les étudiants n'habitent pas à **Tunis**
tous les étudiants n'habitent pas à **Sfax**

constantes

LIMITES DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

tous les étudiants n'habitent pas à Tunis
tous les étudiants n'habitent pas à Sfax

quantificateur existentiel : $\exists$

quantificateur universel : $\forall$

certains étudiants habitent à Tunis

Olfa MOUELHI - Mohamed Heny SELMI

esprit

EXEMPLE DE MODÉLISATION

✓Les chandelles sont faites pour éclairer

$$\forall x, \quad chandelle(x) \rightarrow éclaire(x)$$

✓Quelques chandelles éclairent très mal

$$\exists x, \quad chandelle(x) \wedge éclaireMal(x)$$

✓Quelques objets qui sont faits pour éclairer le font très mal

$$\exists x, \quad éclaire(x) \wedge éclaireMal(x)$$

esprit

SYNTAXE

des connecteurs ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$)

des quantificateurs ($\forall$ *et* $\exists$)

des variables (x,y, …)

des relations (prédicats) (R, S, éclaire, …)

- ***Les prédicats d'arité 0 sont les PROPOSITIONS***

des symboles de fonctions (f, g, …)

- ***les fonctions d'arité 0 sont des constantes***

VOCABULAIRE

Les termes

- les **variables** et les **constantes** sont des **termes**
- $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme si
  - les t_i sont des **termes**
  - f est un symbole de **fonction** d'arité n

  Exemple: a, X, f(a,X) mais pas P(X).

Pas de valeur de vérité

Les atomes

- $R(t_1, \ldots, t_n)$ est un atome si
  - les t_i sont des **termes**
  - R est un symbole de **prédicat** d'arité n

valeur de vérité

FORMULES

- **Un atome est une formule bien formée**
- **Si F et G sont des formules bien formées et X une variable, alors les expressions suivantes sont des formules bien formées :**
  - $\neg(\mathbf{F})$
  - $(\mathbf{F}) \wedge (\mathbf{G})$ et $(\mathbf{F}) \vee (\mathbf{G})$
  - $(\mathbf{F}) \rightarrow (\mathbf{G})$ et $(\mathbf{F}) \leftrightarrow (\mathbf{G})$
  - $\forall \mathbf{x}\ (\mathbf{F})$ et $\exists \mathbf{x}\ (\mathbf{G})$

EXERCICE

En début d'année se pose l'éternel problème de la gestion des emplois du temps, des salles et du matériel d'enseignement.
On utilise les prédicats suivants :

- ✓ **retro(x) : x est un rétroprojecteur.**
- ✓ **video(x) : x est un vidéoprojecteur.**
- ✓ **amphi(x) : x est un amphi.**
- ✓ **salleTD(x) : x est une salle de TD.**
- ✓ **estDans(x,y) : x est dans y.**

TRADUCTION

1. *On trouve toujours un retroprojecteur dans une salle de TD.*
2. *La salle A3 est une salle de TD.*
3. *Il n'y a pas de videoprojecteur dans la salle A3.*
4. *Tous les videoprojecteurs sont dans des amphis.*

CORRECTION

1. *On trouve toujours un rétroprojecteur dans une salle de TD.*
   $\forall x(\ salleTD(x) \rightarrow \exists y(retro(y) \wedge estDans(y,x))\ )$
2. *La salle A3 est une salle de TD.*
   $salleTD(A3)$
3. *Il n'y a pas de vidéoprojecteur dans la salle A3.*
   $\neg(\ \exists x\ (video(x) \wedge estDans(x, A3))\ )$
4. *Tous les vidéoprojecteurs sont dans des amphis.*
   $\forall x(video(x) \rightarrow \exists y(amphi(y) \wedge estDans(x,y))\ )$

CARACTÉRISTIQUES DES VARIABLES

- ✓ **Une variable X est dite liée dans une formule F ssi toutes les occurrences de X sont dans la portée de son quantificateur sinon elle est dite libre.**

  Exemple: $\forall X(\exists Y\, P(X,Y,Z) \vee Q(X,Z)) \vee R(X)$

  La portée de ∀ est $(\exists Y\, P(X,Y,Z) \vee Q(X,Z))$

- ✓ **Une formule n'ayant pas de variable libre est dite close**

$$\forall X \exists \mathrm{Y}\, (\mathrm{P(X)} \rightarrow \mathrm{R(Y)}) \vee \exists \mathrm{Z}\, \mathrm{Q(Z)}$$

EXERCICE

- ✓ Tous les professeurs sont intelligents.
- ✓ Il existe un professeur intelligent.
- ✓ Si un professeur enseigne l'IA, il est intelligent.
- ✓ Tout le monde aime tout le monde.
- ✓ Tout le monde aime quelqu'un.
- ✓ Quelqu'un aime tout le monde.
- ✓ Quelqu'un aime quelqu'un.

- ✓ Quelqu'un aime tous les professeurs de IA.
- ✓ Tous les brésiliens parlent la même langue
- ✓ Les brésiliens ne dansent pas tous la samba.
- ✓ Un politicien peut tromper tout le monde une fois, peut aussi tromper quelqu'un tout le temps, mais ne peut pas tromper tout le monde tout le temps.

ASPECTS SÉMANTIQUES

EXEMPLE D'INTERPRÉTATION

$\forall x \forall y \forall z\ (P(x,y) \wedge Q(y,z) \rightarrow R(x,z))$

$\forall x \forall y\ (\ (M(x,y) \vee P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$

$M(a,b) \wedge P(c,b) \wedge P(d,a) \wedge P(e,c)$

D = { anne, bernard, charles, éric, didier, …}

P= est père de
M= est la mère de
Q= est un parent de
R = est le grand-père de

a= Anne,
b= Bernard
c= Charles
d=didier
e= éric

MODÈLE

✓ **Une interprétation I est dite modèle d'une fomule ssi F est évaluée à « V » selon I.**

Soit $F(x_1, \ldots, x_k)$ une formule quelconque:

✓ **F** est dite **universellement valide** ssi $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_k\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ est valide dans **toutes** les interprétations

✓ **F** est dite **insatisfaisable(consistante)** ssi il existe **une interprétation** pour laquelle $\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_k\ \neg \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ est valide