Les Solutions

1- Soit X l'ensemble des pays suivants:

$X = \{Angleterre,\ Suede, Canada, Germanie, Algerie, Egypte, Turquie\}$, que l'on note par A, S, C, G, Dz, E et T respectivement. On considère le sous-ensemble flou $\mathcal{A}$ $de\ X$ correspondant au degré d'anglophonie des pays considérés :

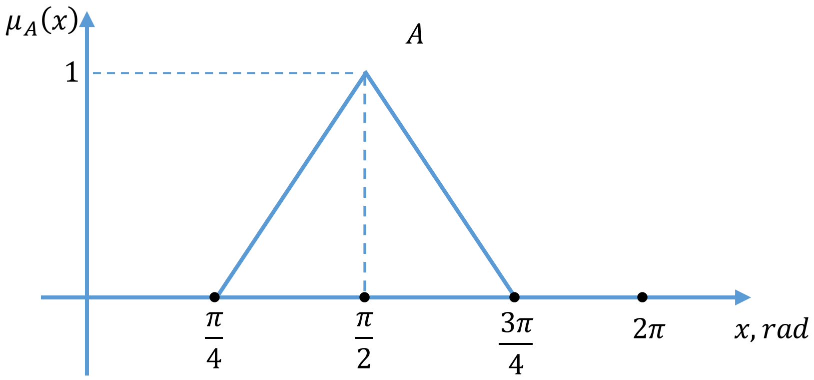
$$\mathcal{A} = \left\{\frac{1}{A}, \frac{0.6}{S}, \frac{1}{C}, \frac{0.5}{G}, \frac{0}{Dz}, \frac{0.3}{E}, \frac{0.1}{T}\right\}$$

1. Calculer la hauteur h($\mathcal{A}$), le support supp($\mathcal{A}$) le noyau noy($\mathcal{A}$) et le cardinal $|\mathcal{A}|$
2. Trouver les $\alpha - cuts\ A_\alpha\ pour\ \alpha = 0.5\ et\ \alpha = 0.7$

Solution :

1. h($\mathcal{A}$)=1 ; supp($\mathcal{A}$)= $\{A,\ S, C, G, E, T\}$; noy($\mathcal{A}$) $= \{A, C\}$ et
   $|\mathcal{A}| = 1 + 0.6 + 1 + 0.5 + 0 + 0.3 + 0.1 = 3.5$
2. $A_\alpha = \{x \in X\ ,\ \mu(x) \geq \alpha\}$
   $\alpha = 0.5 \rightarrow A_\alpha = \{A, S, C, G\}$
   $\alpha = 0.7 \rightarrow A_\alpha = \{A, C\}$

2- On définit sur le domaine $X = [0, 2\pi]$ un ensemble flou A représenté par une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ suivante :



a. Donner l'expression analytique de $\mu_A(x)$
b. Quel est le support et le $\alpha - cut\ \ pour\ \alpha = 0.25\ pour\ l'ensemble\ flou\ A$?
c. Quel est l'ensemble flou $\overline{A}$, complément de A.

Solution :

a. $\mu_A(x)$ est une fonction triangulaire centrée sur $\frac{\pi}{2}$ et de largeur égale $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| & si\ \ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \\ 0 & autrement \end{cases}$$

b. Supp(A) = $\{x \in X\ tel\ que\ \mu_A(x) \neq 0\ \} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

le $\alpha cut\, A_{0.25} = \{x \in X,\ \ tel\ que\ \mu_A(x) \geq 0.25\}$

Cela veut dire que: $1 - \frac{4}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \geq 0.25 = \frac{1}{4}$

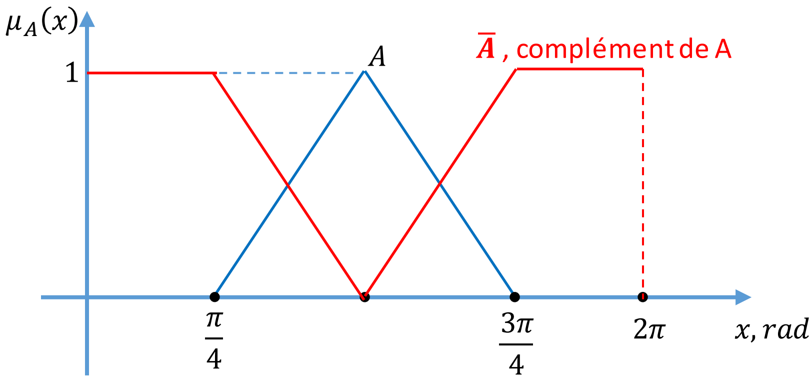
Donc $\frac{4}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \ \rightarrow\ \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{3\pi}{16} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{16}$

$$\frac{8\pi - 3\pi}{16} \leq x \leq \frac{8\pi + 3\pi}{16} \ \rightarrow\ \frac{5\pi}{16} \leq x \leq \frac{11\pi}{16}$$

$$\boldsymbol{\frac{5\pi}{16} \leq x \leq \frac{11\pi}{16}} \ \rightarrow\ \boldsymbol{A_{0.25} = \left[\frac{5\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}\right]}$$

c. Le complément $\bar{A}$ de A est défini par fonction d'appartenance $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ dont l'équation est :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| & si\ \ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \\ 1 & autrement \end{cases}$$



3. On donne les 2 lois de Morgan sur les ensembles suivantes :

$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$ ***et*** $\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}}$

Pour les deux ensembles flous A et B suivants, trouver le complément, l'union, l'intersection entre ces deux ensembles et prouver les 2 lois de Morgan.

$$A = \left\{{}^{1}/_{2}, {}^{0.5}/_{3}, {}^{0.6}/_{4}, {}^{0.2}/_{5}, {}^{0.6}/_{6}\right\},$$
$$B = \left\{{}^{0.5}/_{2}, {}^{0.8}/_{3}, {}^{0.4}/_{4}, {}^{0.7}/_{5}, {}^{0.3}/_{6}\right\}$$

Solution :

- **Complémentation d'un ensemble**

$$\bar{A} : complement\ de\ A, avec\ \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$
$$\bar{B} : complement\ de\ B, avec\ \mu_{\bar{B}}(x) = 1 - \mu_B(x)$$

Donc on a :

$$\bar{A} = \left\{{}^{0}/_{2}, {}^{0.5}/_{3}, {}^{0.4}/_{4}, {}^{0.8}/_{5}, {}^{0.4}/_{6}\right\},$$
$$\bar{B} = \left\{{}^{0.5}/_{2}, {}^{0.2}/_{3}, {}^{0.6}/_{4}, {}^{0.3}/_{5}, {}^{0.7}/_{6}\right\}$$

- **Union de deux ensembles**

$$A \cup B \rightarrow \ \mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Donc on obtient :

$$A \cup B = \left\{{}^{1}/_{2}, {}^{0.8}/_{3}, {}^{0.6}/_{4}, {}^{0.7}/_{5}, {}^{0.6}/_{6}\right\}$$

- **Intersection de deux ensembles**

$$A \cap B \rightarrow \mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Donc on obtient :

$$A \cap B = \left\{{}^{0.5}/_{2}, {}^{0.5}/_{3}, {}^{0.4}/_{4}, {}^{0.2}/_{5}, {}^{0.3}/_{6}\right\}$$

- **Vérification de la loi de Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \left\{{}^{0.5}/_{2}, {}^{0.5}/_{3}, {}^{0.6}/_{4}, {}^{0.8}/_{5}, {}^{0.7}/_{6}\right\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \left\{{}^{0.5}/_{2}, {}^{0.5}/_{3}, {}^{0.6}/_{4}, {}^{0.8}/_{5}, {}^{0.7}/_{6}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

De même on a :

$$\overline{A \cup B} = \left\{{}^{0}/_{2}, {}^{0.2}/_{3}, {}^{0.4}/_{4}, {}^{0.3}/_{5}, {}^{0.4}/_{6}\right\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \left\{{}^{0}/_{2}, {}^{0.2}/_{3}, {}^{0.4}/_{4}, {}^{0.3}/_{5}, {}^{0.4}/_{6}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Les deux lois sont donc vérifiées numériquement.

4. Les ensembles flous A et B sont définis sur l'univers du discours X tel que :

$X = \{0, 1, 2, 3\}$ *et pour fonctions d'appartenance :* $\mu_A(x) = \dfrac{2}{x+3}$ *et* $\mu_B(x) = \dfrac{2x}{x+5}$

Trouver les $acuts\ A_\alpha\ et\ B_\alpha\ pour\ \alpha = 0.2, 0.5, et\ 0.6$

Solution :

On dresse un tableau des valeurs des degrés d'appartenance des éléments de X dans les ensembles flous A et B, données par $\mu_A(x)$ *et* $\mu_B(x)$ pour $x = \{0, 1, 2, 3\}$ respectivement :

X	0	1	2	3
$\mu_A(x) = \dfrac{2}{x+3}$	0.67	0.5	0.4	0.33
$\mu_B(x) = \dfrac{2x}{x+5}$	0	0.33	0.57	0.75

D'où on tire que :

Pour $\boldsymbol{\alpha = 0.2}$	Pour $\boldsymbol{\alpha = 0.5}$	Pour $\boldsymbol{\alpha = 0.6}$
$A_{0.2} = \{0, 1, 2, 3\}$ $B_{0.2} = \{1, 2, 3\}$	$A_{0.2} = \{0, 1\}$ $B_{0.2} = \{2, 3\}$	$A_{0.2} = \{0\}$ $B_{0.2} = \{3\}$