

Corrigé de l'examen d'Algèbre (1)

Exo 1:

1) Vraie, La preuve de cette équivalence peut être donnée en utilisant l'équivalence $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$

$$\begin{aligned} \text{On a: } (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}) &\Leftrightarrow \bar{\bar{Q}} \vee \bar{P} \\ &\Leftrightarrow Q \vee \bar{P} \\ &\Leftrightarrow \bar{P} \vee Q \\ &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \end{aligned}$$

①

2) Fausse, La preuve:

$$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$$

①

3) Vraie, La preuve:

$$\begin{aligned} A/B &= \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin (A \cap B)\} \\ &= C_A(A \cap B) \end{aligned}$$

①

4) Fausse, La preuve: si on prend $x=0$ et $y=\pi$

$$\text{On a: } 0 \text{ R } \pi \text{ car: } \cos^2 0 + \sin^2 0 = 1, \text{ et aussi } \pi \text{ R } 0 \text{ car } \cos^2 \pi + \sin^2 0 = 1$$

mais $0 \neq \pi$

①

5) Vraie, La preuve par le raisonnement par récurrence

$$\text{Soit } P(n) : 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $P(1)$ est vraie car: pour $n=1$ on a: $1=1$

①

- On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est aussi vraie
tel que: $P(n+1) : 1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\text{On a: } 1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

d'où $P(n+1)$ est vraie, par récurrence $P(n)$ est vraie.

Exco 2: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = x^3 - 3x + 2$

1) a) calculons $f(A)$ et $f^{-1}(B)$

$$f(A) = \{ f(x), x \in A \} = \{ f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2) \} = \{ 0, 2, 4 \}$$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R}, f(x) \in B \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}, x^3 - 3x + 2 = 2 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}, x(x^2 - 3) = 0 \}$$

$$= \{ -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3} \}$$

b) - L'injectivité de f : d'après la question précédente,

$$\text{on a: } f(-2) = f(1) = 0 \text{ mais } -2 \neq 1$$

donc f n'est pas injective

- La bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective

2) Soit R la relation binaire définie par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Montrons que R est une relation d'équivalence

i) Réflexivité: $\forall x \in \mathbb{R}: x R x$ (vrai)

$$\text{On a: } x R x \Leftrightarrow f(x) = f(x) \text{ (vrai)}$$

donc R est réflexive.

ii) Symétrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x R y \Rightarrow y R x$

$$\text{On a: } x R y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow f(y) = f(x)$$

$$\Rightarrow y R x$$

donc: R est symétrique

iii) Transitivité: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$ (0,25)

On a: $\begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ \text{et} \\ f(y) = f(z) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(z) \Leftrightarrow x R z$ (0,5)

donc R est transitive.

Conclusion: De i), ii) et iii), R est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .

b) Déterminons les classes d'équivalences de 0 et -2

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{R} : x R 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) = 2\} \quad (0,25) \\ &= \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\} \quad (0,5) \end{aligned}$$

$$\overline{-2} = \{x \in \mathbb{R} : x R -2\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-2) = 0\} \quad (0,25)$$

et d'après la question 1) a), on déduit que:

$$x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{alors, } \overline{-2} &= \{x \in \mathbb{R} : (x+2)(x-1)^2 = 0\} \\ &= \{-2, 1\} \quad (0,5) \end{aligned}$$

Exo 3: $G = \mathbb{R} - \{-2\}$, $\forall x, y \in G: x * y = xy + 2(x+y) + 2$

1) Montrons que $(G, *)$ est un groupe Abélien:

i) La commutativité: $\forall x, y \in G: x * y = y * x$ (0,25)

$$x * y = xy + 2(x+y) + 2 = yx + 2(y+x) + 2 = y * x$$

d'où $*$ est commutative. (0,75)

ii) L'associativité: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x * y) * z = x * (y * z)$ (0,25)

$$(x * y) * z = [xy + 2(x+y) + 2] * z = xyz + 2z(x+y) + 2z + 2[xy + 2(x+y) + 2z] + 2$$

$$= xyz + 2xz + 2yz + 2xy + 4x + 4y + 4z + 6$$
 (0,5)

$$x * (y * z) = x * [yz + 2(y+z) + 2] = xyz + 2x(y+z) + 2x + 2[yz + 2(y+z) + 2 + x] + 2$$

$$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6$$
 (0,5)

donc: $x * (y * z) = (x * y) * z$ d'où l'associativité de $*$

iii) L'existence du neutre:

$\exists! e \in G, \forall x \in G$ tq: $x * e = e * x = x$ (0,25)

$$\text{On a: } x * e = x \Rightarrow xe + 2(x+e) + 2 = x$$

$$\Rightarrow xe + x + 2e + 2 = 0$$

$$\Rightarrow e(x+2) = -(x+2) \Rightarrow e = -1 \in G$$
 (0,75)

iv) L'existence du symétrique:

$\forall x \in G, \exists! x^{-1} \in G$ tq $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (0,25)

$$\text{On a: } x * x^{-1} = e = -1 \Rightarrow xx^{-1} + 2(x+x^{-1}) + 2 = -1$$

$$\Rightarrow x^{-1}(x+2) = -3 - 2x \Rightarrow x^{-1} = \frac{-3-2x}{x+2} \in G$$
 (0,5)

On montre que: $x^{-1} \in G \Leftrightarrow x^{-1} \neq -2$

On suppose que $x^{-1} = \frac{-3-2x}{x+2} = -2 \Rightarrow -3-2x = -2x-4$

$$\Rightarrow -3 = -4 \text{ (faux)}$$

d'où $x^{-1} \notin G$ (0,25)

et $x^{-1} = \frac{-3-2x}{x+2}$

$$2) H = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$$

$(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$ ssi $\begin{cases} e \in H \\ \forall x, y \in H: x * y \in H \\ \forall x \in H: x^{-1} \in H \end{cases}$ (0,25)

i) $e = -1 \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$ (0,25)

ii) $\forall x, y \in H: x * y \in H$?

On a: $\begin{cases} x \in H \\ \text{et} \\ y \in H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \text{et} \\ y > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ \text{et} \\ y+2 > 0 \end{cases}$

de plus: $x * y = xy + 2(x+y) + 2$
 $= xy + 2x + 2y + 2$

On veut démontrer que: $x * y \in H \Leftrightarrow x * y > -2$

C-à-d: $xy + 2x + 2y + 2 > -2$

$$\Leftrightarrow xy + 2x + 2y + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(y+2) > 0$$

Comme: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ \text{et} \\ y+2 > 0 \end{cases}$ alors: $(x+2)(y+2) > 0$

d'où $x * y \in H$ (0,5)

iii) $\forall x \in H: x^{-1} \in H$

$x \in H \Rightarrow x > -2$ on veut démontrer que $x^{-1} > -2$

$$\text{c-à-d } \frac{-3-2x}{x+2} > -2 \Leftrightarrow \frac{-3-2x}{x+2} + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} > 0$$

Comme $x > -2$ alors: $\frac{1}{x+2} > 0$ d'où $x^{-1} \in H$ (0,5)

On déduit que $(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$

3) $f: (G, *) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ avec: $f(x) = x+2$
 f est un isomorphisme de groupes ssi: $\begin{cases} - f \text{ est morphisme} \\ - f \text{ est bijective} \end{cases}$ (0,25)
 f est un morphisme de groupes ssi: $f(x * y) = f(x) \times f(y)$ (0,25)

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(xy + 2(x+y) + 2) = xy + 2(x+y) + 2 + 2 \\ &= xy + 2(x+y) + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \times f(y) &= (x+2)(y+2) = xy + 2x + 2y + 4 \\ &= xy + 2(x+y) + 4 \end{aligned}$$

d'où: $f(x * y) = f(x) \times f(y)$ (0,75)

On déduit que f est un morphisme de groupes

f est bijective:

L'injectivité: $\forall x_1, x_2 \in G: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2$

d'où f est injective $\Rightarrow x_1 = x_2$ (0,5)

La surjectivité: $\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists ! x \in G$ tq $y = f(x)$

On a: $y = f(x) \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$ (0,5)

Comme $y \neq 0$ alors $x \neq -2$ alors f est surjective et elle est bijective

Examen D'Algèbre

Exercice 1 (5 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1. Soient P et Q deux propositions logiques, alors on a l'équivalence suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

2. Soit $E = \{a, b, c\}$, alors l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des parties de E est égal :

$$\mathbb{P}(E) = \{a, b, c, \}$$

3. Soient A et B deux parties de l'ensemble E , alors on a l'égalité suivante :

$$A/B = C_A(A \cap B)$$

4. Sur \mathbb{R} , on définit la relation \mathcal{R} par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y = 1$, alors \mathcal{R} est anti-symétrique.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2 (7 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Soient les ensembles : $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{2\}$

(a) Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

(b) L'application f est-elle injective ? bijective ? justifier.

2. On désigne par \mathcal{R} la relation binaire définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

(a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .

(b) Déterminer la classe d'équivalence de 0 et -2.

Exercice 3 (8 points)

Soit $G = \mathbb{R} - \{-2\}$, on définit sur G la loi de composition interne $*$ par :

$$\forall x, y \in G, x * y = xy + 2(x + y) + 2$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe Abélien.

2. Soit $H = \{x \in \mathbb{R}, x > -2\}$, Montrer que $(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$.

3. On considère l'application f du groupe $(G, *)$ dans le groupe multiplicatif (\mathbb{R}^*, \times) par :

$$f(x) = x + 2$$

Montrer que f est un isomorphisme de groupes $(G, *)$ dans (\mathbb{R}^*, \times) .