L1 Informatics **Badji Mokhtar – Annaba University** **2023/2024**
Algebra 2 **Faculty of Technology** **Dr. Neggal bilel**
Department of Informatics

Series of Exercises 01
Vector Space

exercice 1 *Find which of the sets $E_1; E_2$ et E_3 are vector subspaces of $\mathbb{R}^3$:*

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$

b) $E_2 = \{(x + y + z, x - y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$

c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y e^z = 0\}$

exercice 2 *Let $F = \{f/f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ the set of functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Are the following subsets vector subspaces of F :*

a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(1) = 0\}$

b) $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ is positive}\}$

c) $F_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ is increasing function}\}$

exercice 3

1. *Show that the family $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ is a generating family of $\mathbb{R}^2$*
2. *Which families are linearly independent among the following families :*
   a) $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ *in* $\mathbb{R}^3$
   b) $F_2 = \{(0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 0); (2, 1, 1, 0)\}$ *in* $\mathbb{R}^4$
3. *Show that the family $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ is a basis of $\mathbb{R}^2$ and the family $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ is a basis of $\mathbb{R}^3$*
4. *Find the coordinates of the vector $v = (-3, 1)$ in the base B.*

exercice 4 *Let F and G two vector subspaces of $\mathbb{R}^3$ defined by :*
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ *and* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$

1. *Give a basis for F, a basis for G, and deduce their respective dimensions.*
2. *Give a basis for $F \cap G$, and give its dimension.*
3. *Do we have $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?*

exercice 5 *We consider in $\mathbb{R}^3$, the subset F defined by :*

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. *Show that F is a vector subspace of $\mathbb{R}^3$.*
2. *Give a basis for F, and give its dimension.*
3. *F is it equal to $\mathbb{R}^3$*

exercice 6 *Let $\mathbb{P}_2[X]$ the vector space of polynomials of degree less than or equal to 2 with coefficients in $\mathbb{R}$*
$P_1(X) = 1, P_2(X) = X - 1, P_3(X) = X^2, P_4(X) = X(X - 1)$ *elements of* $\mathbb{P}_2[X]$

1. *Show that $B = \{P_1(X), P_2(X), P_3(X)\}$ is a basis of $\mathbb{P}_2[X]$*
2. *Find the coordinates of the vector $P_4(X)$ in this base.*

Série de TD 01
Les espaces vectoriels

Exercice 1 *Déterminer lesquels des ensembles* $E_1; E_2$ *et* E_3 *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$

b) $E_2 = \{(x + y + z, x - y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$

c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y e^z = 0\}$

Exercice 2 *Soit* $F = \{f/f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de* F *:*

a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(1) = 0\}$

b) $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad \textit{est positive}\}$

c) $F_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad \textit{est croissante}\}$

Exercice 3

1. *Montrer que la famille* $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$
2. *Quelle sont les familles libre parmi les familles suivantes :*
   a) $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$
   b) $F_2 = \{(0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 0); (2, 1, 1, 0)\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$
3. *Montrer que la famille* $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$ *et que la famille* $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$
4. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $v = (-3, 1)$ *dans la base* B.

Exercice 4 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *définis par :*
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$

1. *Donner une base de* F*, une base de* G*, en déduire leur dimension respective.*
2. *Donner une base de* $F \cap G$*, et donner sa dimension.*
3. *A-t-on* $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 5 *On considère dans* $\mathbb{R}^3$*, le sous ensemble* F *défini par :*

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. *Montrer que* F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Donner une base de* F*, quelle est sa dimension ?*
3. F *est-il égale à* $\mathbb{R}^3$

Exercice 6 *Soient* $\mathbb{P}_2[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans* $\mathbb{R}$
$P_1(X) = 1, P_2(X) = X - 1, P_3(X) = X^2, P_4(X) = X(X - 1)$ *des éléments de* $\mathbb{P}_2[X]$

1. *Montrer que* $B = \{P_1(X), P_2(X), P_3(X)\}$ *est une base de* $\mathbb{P}_2[X]$
2. *déterminer les coordonnées du vecteur* $P_4(X)$ *dans cette base.*