Badji Mokhtar – Annaba University

L1 Informatics **Faculty of Technology** **2023/2024**

Algebra 2 **Dr. Neggal bilel**

Department of Informatics

Series of Exercises 02
Linear Mappings

exercice 1 *Determine whether the following functions f_i are linear :*

$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \longrightarrow f_1(x, y, z) = x + 2y + z$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longrightarrow f_2(x, y) = (2x + y, x - y)$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \longrightarrow f_3(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y) \longrightarrow f_4(x, y) = (xy, x, y)$

exercice 2 *For the following linear mappings, determine* $\ker f_i$ *and* Imf_i*. From this, deduce whether* f_i *is injective, surjective, or bijective.*

— $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f_1(x, y) = (x + y, x - y)$
— $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f_2(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$
— $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f_3(x, y, z) = (2x + 3y, y + 2z)$
— $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f_4(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$

exercice 3 *Let f be function defined from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$ by :*

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, x - y)$$

1. *Show that f is a linear map.*
2. *Find* $\ker f$ *and* Imf*, and determine their dimensions. Is f bijective ?*
3. *Determine $f \circ f$*

exercice 4 *let $E = \mathbb{R}_4[X]$ be the vector space of real-coefficient polynomials of degree less than or equal to 4 and the function $f : E \longrightarrow E$ defined by : $f(P) = P - P'$*

1. *Show that f is a linear map.*
2. *Is the function f injective ? Surjective ?*

exercice 5 *We denote $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ The canonical basis of $\mathbb{R}^3$ and f the endomorphism in $\mathbb{R}^3$ defined by :*

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. *Let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculate $f(u)$*
2. *Determine a basis of* $\ker f$.
3. *Is f injective ? can it be surjective ? For what ?*
4. *Determine a basis of Imf. Deduce the rank of f.*
5. *Show that $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Imf$*

exercice 6 *Let f be function defined from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^4$ by :*

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

1. *Calculate images by f of canonical basis vectors (e_1, e_2, e_3) of $\mathbb{R}^3$. Deduce a basis of Imf and the rank of f.*
2. *Determine a basis of* $\ker f$.
3. *Is the function f injective ? surjective ?*

L1 Informatique — Université Badji Mokhtar Annaba — 2023/2024
Algèbre 2 — Faculté Des Technologies — Dr. Neggal bilel
Département d'Informatique

Série de TD 02
Les applications linéaires

Exercice 1 *Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :*

$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \longrightarrow f_1(x, y, z) = x + 2y + z$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longrightarrow f_2(x, y) = (2x + y, x - y)$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \longrightarrow f_3(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y) \longrightarrow f_4(x, y) = (xy, x, y)$

Exercice 2 *Pour les applications linéaires suivantes, déterminer* $\ker f_i$ *et* Imf_i. *En déduire si* f_i *est injective, surjective, bijective.*

— $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f_1(x, y) = (x + y, x - y)$
— $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f_2(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$
— $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f_3(x, y, z) = (2x + 3y, y + 2z)$
— $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f_4(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$

Exercice 3 *Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, x - y)$$

1. *Monter que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer* $\ker f$ *et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?*
3. *Déterminer $f \circ f$*

Exercice 4 *Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4 et l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par : $f(P) = P - P'$*

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *L'application f est-elle injective ? surjective ?*

Exercice 5 *On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. *Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(u)$*
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. *f est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?*
4. *Déterminer une base de Imf. Déduire le rang de f.*
5. *Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Imf$*

Exercice 6 *Soit l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par :*

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

1. *Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de Imf et le rang de f.*
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. *L'application f est-elle injective ?surjective ?*