**Chapitre 2. Stabilité des Systèmes au sens de Lyapunov**

**2. 1. Introduction**

 Les systèmes non linéaires se différencient par le type de non linéarité qui les affecte. Autrement dit, il n’y a pas de méthode générale, chaque système non linéaire est un système unique, par conséquent, il faudra choisir la méthode non linéaire adéquate pour son étude, selon le type de non linéarité qui l’affecte.

**2. 2. Non linéarités**

La figure 2.1 donne quelques exemples de non linéarités sous formes de signaux.

 Fig.2.1 : Quelques exemples de non linéarités.

- Non linéarités de type produit 

- Non linéarités de type polynomial 

- Non linéarités de type fonction non linéaire 

- Non linéarités de type seuil (fig. a, b), saturation (fig. c, d, e), hystérésis (fig. f).

****

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

 (6/6/1857—03/11/1918)

**2.3. Définitions de bases**

L’étude de la stabilité des systèmes au sens de Lyapunov utilise la représentation d’état pour modéliser un système autonome. Par conséquent l’équation d’état se réduit à :

 $\dot{X}\left(t\right)=F(X, t)$ avec  (2.3)

***Définition 1 : Espace d’état :*** Soit  le vecteur d’état d’un système. L’espace définit par les composantes (variables) du vecteur d’état d’un système est appelé espace d’état.

***Définition 2 : Espace de mouvement :*** Si on ajoute une dimension temporelle à l’espace d’état on obtient alors ce qu’on appelle un espace de mouvement définit par,par conséquent l’équation d’état devient $\dot{X}\left(t\right)=F(X, t)$.

***Définition 3 : Espace de phase :***La représentation des variations de chaque composante du vecteur d’état en fonction de sa valeur à chaque instant est appelée espace de phase $\dot{X}\left(t\right)=F(X(t))$.

***Définition 4 : Etat d’équilibre:*** Tout état  du système $\dot{X}\left(t\right)=F(X, t)$ tel que  est appelé un état d’équilibre du système.

**2. 4. Fonctions de Lyapunov et propriétés**

***a) Fonction semi définie positive :*** Une fonction de Lyapunov $V(X,t)$ est dite semi définie positive dans l’espace d’état si et seulement si :

 et ,  (2.6)

***b) Fonction définie positive :*** Une fonction de Lyapunov est dite définie positive dans l’espace d’état si et seulement si :

 et ,  (2.7)

***c) Fonction définie négative :*** Si une fonction de Lyapunov est définie positive dans l’espace d’état alors  est définie négative dans l’espace d’état.

De la même manière on définit les fonctions de Lyapunov dans l’espace de mouvement.

***d) Dérivée d’une fonction de Lyapunov***

Soit une fonction de Lyapunov. La dérivée de est alors donnée par :

 (2.8)

En remplaçant la dérivée par sa valeur  on aura alors :

 (2.11)

**2.5. Principaux théorèmes de Lyapunov**

Soit le système dont l’équation d’état est : , supposons qu’il existe une fonction scalaire dite fonction de Lyapunov dont les dérivées partielles du premier ordre sont continues. La fonction de Lyapunov doit en plus satisfaire les conditions de travail suivantes :

a) ,

b) .

c)   ,

1.   (Fonction radialement limitée ou bornée),
2.  si  alors l’état d’équilibre  est globalement stable.

Le tableau 1 résume les principaux théorèmes.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  Type de Stabilité |
|  |  | Stabilité simple |
|  |  | Stabilité asymptotique |
|  |  | Instabilité (Th. Persidsky) |
|  |  | Instabilité complète |
| indéfinie |  | Instabilité (Th. Chetaiev) |

 Tableau 1 : Résumé des théorèmes