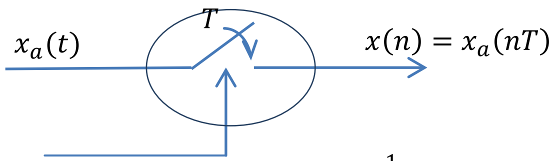
Echantillonnage des Signaux Analogiques

Pour le traitement numérique des signaux analogiques il faut impérativement transformer ces derniers sous une forme adaptée au calcul et sauvegarde en mémoire par les processeurs de traitements numériques. L'opération primordiale dans cette transformation est l'échantillonnage du signal conduisant à une forme discrète du signal continu, assimilable à une modulation par un train d'impulsions de Dirac (ou peigne de Dirac).

$$sig.\,analogique : x_a(t) \longrightarrow \boxed{\text{Echantillonneur}} \longrightarrow x(n) = x_a(nT):\ sig.\,échantillonné$$

$$n \in \mathbb{N}\ ou \mathbb{Z}$$



T: $période\ d'échantillonnage$

$f_e = \frac{1}{T}$: $fréquence\ d'échantillonnage$

Horloge de commande à la fréquence $f_e = \frac{1}{T}$

Analyse spectrale de l'échantillonnage

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
x_a(t) \arrow[r, "\text{Echantillonnage temporel}", "{t = nT = \frac{n}{f_e},\quad n \in \mathbb{N}\ ou \mathbb{Z}}"'] \arrow[d, "Transf.\,de\,Fourier"] & x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)\delta(t - nT) \arrow[d, "Transf.\,de\,Fourier"'] \\
X_a(f) \arrow[r, "f_e", "\text{Périodisation spectrale}"'] & X_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(f - nf_e)
\end{tikzcd}$$

Exercice 5.1 Soit donné un signal analogique $x(t) = 5\cos(2\pi.2500t) + 2\cos(2\pi.3200t)$ échantillonné à une fréquence de 8000 Hz.

a. Tracer le spectre du signal échantillonné jusqu'à $20\ kHz$.
b. Tracer le spectre du signal analogique reconstruit après filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 4kHz$ appliqué au signal échantillonné.

Exercice 5.2 Soit donné un signal analogique $x(t) = 5\cos(2\pi.1500t) + 2\cos(2\pi.4200t)$ échantillonné à une fréquence de 8000 Hz.

a. Répéter la même question en a. de l'exercice 5.1
b. Répéter la même question en b. de l'exercice 5.1
c. Déterminer la fréquence/fréquences des alias parasites

Exercice 5.3 On considère le signal sinusoïdal de fréquence fondamentale $F_0 = 4kHz$ suivant:

$$x(t) = 5\cos(2\pi F_0 t) = 5\cos(8000\pi t)$$

a. Ce signal est échantillonné à une fréquence $F_e\ de\ 6000$ échantillons/seconde et reconstruit en utilisant un filtre passe-bas dont la fonction de transfert est :

$$H_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{6000} & si \quad |\omega| \leq 6000\pi \\ 0 & autrement \end{cases}$$ déterminer le signal reconstruit.

b. Répéter la question a. pour une fréquence d'échantillonnage $F_e\ de\ 12000$ échantillons/seconde et un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert :

$$H_2(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{12000} & si \quad |\omega| \leq 12000\pi \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Exercice 5.4 on considère le signal analogique $x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10 sin 300\pi t - cos 100\pi t$. Quelle est la fréquence de Nyquist pour ce signal ?

Exercice 5.5 Etant donné le signal analogique $x_a(t) = 3\cos(100\pi t)$.

a. Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale pour éviter le repliement du spectre.
b. On suppose que le signal soit échantillonné à une fréquence $F_e = 200\ Hz$. Quel est le signal discret obtenu après échantillonnage ?
c. On suppose que le signal soit échantillonné à une fréquence $F_e = 75\ Hz$. Quel est le signal discret obtenu après échantillonnage ?
d. Quelle est la fréquence $0 < F < F_e/2$ d'une sinusoïde produisant les mêmes échantillons que ceux obtenus en c.
   Devoir à la maison : utiliser Matlab pour implémenter cet exercice.

Exercice 5.6 soit le signal analogique suivant :

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5 sin 6000\pi t + 10 cos 12000\pi t \, .$$

a. Quelle est la fréquence de Nyquist pour ce signal ?
b. En supposant que ce signal soit échantillonné à la fréquence $F_e = 5000$ échantillons/seconde quel sera le signal discret obtenu après cet échantillonnage ?
c. Quel est le signal analogique $y_a(t)$ qu'on peut reconstruire à partir des échantillons en utilisant une interpolation idéale ?