Analyse de Fourier des Signaux à Temps Discrets

Rappels

* **<u>Transformée de Fourier des Signaux à temps discret : TFTD</u>**

$$x(t) \longrightarrow x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$analyse:\ x(n) \xrightarrow{\textit{Transformée directe}} TFTD:\quad X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad ,\Omega \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou}\quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \quad ,f \in \mathbb{R}$$

$$synthèse: X(j\Omega) \xrightarrow{\textit{Transformée inverse}} TFTDI:\quad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(j\Omega)e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$ou\quad x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\mathrm{f})\, e^{j2\pi fn} df \ ,\ \ \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$$

On remarque que la TFTD $X(j\Omega)$ est périodique, (de période2π), pulsation discrète Ω , car $e^{j\Omega} = e^{j(\Omega+2\pi)}$, ou en fonction de la fréquence, $X(f)\ périodique\ (période\ f = 1)$

En général, $X(\Omega) \in \mathbb{C},\ est\ complexe.$

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \implies \Omega \in [-\pi, \pi], suffisant\ pour\ l'analyse.$$

$X(\Omega)$ est appelée spectre de fréquence de la séquence $\{x(n)\}$.

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{jargX(\Omega)} \rightarrow \begin{cases} |X(\Omega)|: spectre\ d'amplitude \\ argX(\Omega): spectre\ de\ phase \end{cases}$$

Souvent on exprime le spectre d'amplitude en dB : $|X(\Omega)|_{dB} = 20log_{10}(|X(\Omega)|)$

- Propriétés de la TFTD

Globalement, la TFTD possède les mêmes propriétés que la TF des signaux à temps continus. $X(f)$ est une fonction complexe. Si $x(n)$ est réel alors le spectre d'amplitude,$|X(f)|$, est une fonction paire, par contre le spectre de phase, $\arg\big(X(f)\big)$, est une fonction impaire, étudiés sur l'intervalle $f \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right]$.

- Linéarité : $a\,x(n) + b\,y(n) \leftrightarrow a\,X(f) + b\,Y(f)$
- Décalage temporel : $x(n - n_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi n_0 f}$
- Décalage fréquentiel : $x(n)e^{j2\pi n f_0} \leftrightarrow X(f - f_0)$

- TF de la dérivée du signal : $\frac{d\,x(n)}{dn} \leftrightarrow j2\pi f.X(f)$
- Relation de Parseval : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2\, df$
- Relation de Plancherel :

$$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(f).Y(f),\ \text{où } *: opérateur\ de\ convolution$$

$$x(n).y(n) \leftrightarrow X(f) * y(f) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\vartheta)y(f-\vartheta)d\vartheta$$

- TFTD Inverse

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{j2\pi nf} df \ \ ou\ bien\ \ x(n) = \int_{0}^{1} X(f)\, e^{j2\pi nf} df$$

* **<u>Transformée de Fourier Discrète TFD</u>**

Pour calculer la TF d'un signal discret en utilisant des processeurs de traitement numériques (DSP, FPGA, micro-ordinateurs…), il suffit de discrétiser la variable de fréquence *f* sur l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$ et calculer la TFTD sur un nombre fini *N* de points.

$on\ prend\ f_k = \frac{k}{NT_e}\ pour\ k \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1\right\}\ \ ce\ qui\ donne, pour\ N\ pair:$

$$\forall\, k \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1\right\} \quad X(f_k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

La TFD est périodique, de période *N* : $\{X(k)\}_{k\in\left\{-\frac{N}{2},\dots,-1\right\}} = \{X(k)\}_{k\in\left\{\frac{N}{2},\dots,N-1\right\}}$

$$ceci\ nous\ amène\ calculer$$

$$\{\boldsymbol{X(k)}\}_{\boldsymbol{k} \in \{\boldsymbol{0},\dots,\boldsymbol{N-1}\}}$$

$\{X(k)\}_{k \in \{0,\dots,N-1\}}$ est la TFD de la séquence temporelle $\{x(n)\}_{n \in \{0,\dots,N-1\}}$

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{j2\pi\frac{nk}{N}} \quad \underset{\text{Synthèse :TFD Inverse}}{\overset{\text{Analyse : TFD}}{\rightleftarrows}} \quad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$

$$en\ posant\ \ W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}, la\ TFD\ d'une\ séquence\ \{x_n\} de\ N\ points,$$
$$définie\ sur\ 0 \le n \le N-1\ est\ donc$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, W_N^{kn} \quad , k = 0, \dots, N-1$$

$$la\ TFD\ est\ linéaire\ et\ vérifie\ le\ théorème\ de\ Parseval: \sum_{n=0}^{N-1}|x_n|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X_k|^2$$

* **Transformée en Z**

La transformée en Z d'un signal discret est l'équivalent de la transformée de Laplace pour les signaux continus. C'est aussi une généralisation de la TFTD applicable à une classe plus large de signaux observés dans diverses applications techniques.

Soit une séquence $[n] = \{x(n), \quad n \in \mathbb{Z}\}$, la transformée en Z de cette séquence, notée $X(z)$ est définie par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad : transf.en\ Z\ bilatérale$$

$$ou \quad X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad : transf.en\ Z\ unilatérale, \qquad si\ x[n]\ causale$$

$$x_n = TZ^{-1}[X(z)] = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz \quad \underset{\text{Synthèse : } \boldsymbol{TZ\ Inverse}}{\overset{\text{Analyse : } \boldsymbol{TZ}}{\rightleftarrows}} \quad X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, z^{-n}$$

On note que la *TFTD* de $x[n]$ est équivalente à la *TZ* de $x[n]$ évaluée sur le cercle $z = e^{j\Omega}$:

$$signal\ discret\ x(n) \ \rightarrow TZ\!: \ X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, z^{-n} \rightarrow TFTD: X\left(e^{j\Omega}\right) = X(z)_{|z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, e^{j\Omega^{-n}}$$

TD. Transformée de Fourier des signaux à Temps Discret (TFTD)

Exercice 1. Calculer la TFTD des signaux suivants et tracer $X(\Omega)$.

a. $x(n) = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$
b. $x(n) = [1, -2,\ 1]$
c. $x(n) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)\ ,\ \ u(n)\ échelon\ discret.$

Exercice 2. Trouver la TFTD des signaux suivants :

a. Une impulsion rectangulaire de durée $2M+1$ et de support de $-M$ à $+M$.
b. Une séquence exponentielle causale $x_1(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$. Module et phase de $X_1(\Omega)$.
c. Une séquence exponentielle symétrique $x_2(n) = a^{|n|} u(n)$, $|a| < 1$. Module et phase de $X_2(\Omega)$.

Exercice 3. Calculer la TFTD des signaux suivants et tracer $X(\Omega)$.

a. $s_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
b. $s_2(n) = (a^n \sin \Omega_0 n) u(n) \qquad |a|$
c. $s_3(n) = \begin{cases} 1 & pour \;\; n = 0,1,2,3 \\ 0 & autrement \end{cases}$
d. $s_4(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+2)$

Exercice 4. On considère un système discret de réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n).$$

Déterminer la réponse du système à chacun des signaux suivants :

a. $x(n) = (-1)^n = e^{j\pi n} \;\; pour \; tout \; n.$
b. $x(n) = e^{j\pi n/4} \;\; \forall \, n$.
c. $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \;\; \forall \, n.$

Exercice 5. Calculer la TFTD de $y(n) = 4 \, \cos(0.15\,\pi n + 1)$ et vérifier le théorème de Parseval pour ce signal.

Exercice 6. Soit $x(n) = n3^{-|n-2|} \; \forall n \;\; et \;\; y(n) = 2^n u(-n) \; \forall n.$ Déterminer la TFTD de ces deux signaux.

Exercice 7. Trouver la TFTD inverse de $H(\Omega) = 4\cos(2\Omega) + 6\cos(\Omega) + j8\sin(2\Omega) + j2\sin(\Omega)$.

Exercice 8. On considère le spectre périodique $X(e^{j\Omega})$ de période 2π tel que :

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & si \; 1 < |\Omega| < 2 \\ 0, & si \;\; |\Omega| \leq 1 \; ou \; 2 \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

Trouver la TFTD inverse de $X(e^{j\Omega})$.

Exercice 9. Soit un système linéaire invariant discret (SLID) causal décrit par l'équation aux différences entrée-sortie suivante :

$$8y(n) - 6y(n-1) + y(n-2) = 8x(n) \quad , \quad x(n): entrée \;\; et \; y(n): sortie$$

a. Trouver la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$ du système .

b. Trouver sa réponse impulsionnelle $h(n)$.

c. Déterminer quelle sera la réponse du système à une entrée $x_1(n) = \delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1)$.

d. Déterminer quelle sera la réponse du système à une entrée $x_2(n) = e^{j\pi n}$.

TD. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Exercice 10. Calculer la TFD pour chacune des séquences de durée finie N (avec N paire) :

a. $x[n] = \delta[n]$

b. $x[n] = \delta[n - n_0] \quad 0 \le n_0 \le N-1$

c. $x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

Exercice 11. Soient deux séquences de 4-points chacune $x[n]\ et\ h[n]$ données par :

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad n = 0,1,2,3, \quad et \quad h[n] = 2^n, \quad n = 0,1,2,3.$$

a. Calculer la TFD sur 4-points $X[k] \;\; de \;\; x[n]$.

b. Calculer la TFD sur 4-points $H[k] \;\; de \;\; h[n]$.

c. Calculer $y[n] = x[n] * h[n]$ par convolution discrète.

d. Calculer $y[n] = TFD^{-1}[X(k).H(k)]$, en utilisant la TFD inverse du produit $X(k)\ et\ H(k)$.

Exercice 12. 1. Trouver la TFD du signal $x(n) = 6\,cos^2(\frac{\pi}{4}n)$.

2. Calculer sur N-point l'inverse de $\{X(k)\}_{k=0}^{N-1}\ tel\ que$

$$X(k) = \delta(k - k_0) \;\; , \quad k_0 \in \{0,1,\dots,N-1\}$$

TD. Transformée en Z

Exercice 13. Trouver la Transformée en Z des signaux discrets suivants :

$$x[n] = \begin{cases} \left({}^{1}/_{2}\right)^{n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad et \quad y[n] = \begin{cases} -\left({}^{1}/_{2}\right)^{n} & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 14. Trouver la Transformée en Z des signaux discrets suivants :

$$x[n] = \begin{cases} 3^{n} & n < 0 \\ (1/3)^{n} & n \ pair \\ (1/2)^{n} & n \ \ impair \end{cases}$$

Exercice 15. On considère le système discret causal ayant la fonction de transfert pulsée :

$$H(z) = \frac{3z + 2z^{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)}$$

a. Trouver la réponse impulsionnelle $h[n]$.
b. Pour une entrée $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n)$ déterminer la sortie $y[n]$.

Exercice 16. Un système discret SLID possède l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + x[n-2]$$

a. Trouver la fonction de transfert $H(z)$.
b. Tracer les pôles et zéros de $H(z)$.

Exercice 17. Un signal $x(n)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\,\delta(n-1)$. La sortie du système est donnée par le signal avec distorsion $y(n)$. Théoriquement, $x(n)$ peut etre reconstitué à partir de y(n) par un filtrage inverse (déconvolution) dont la fonction de transfert est égale au réciproque de celle du filtre direct.

a. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ et la TFD à 4-points $H(k) de\ h(n)$.
b. Soit $H_i(z)$ la fonction de transfert du filtre inverse et $h_i(n)$ sa réponse impulsionnelle déterminer $h_i(n)$. est-ce un filtre RII ou RIF ?
c. Si $x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$, calculer la sortie $y(n) = x(n) * h(n)$ par convolution directe.
d. Utiliser la TFD de $x(n)\ et\ de\ h(n)$ ainsi que la TFD inverse pour trouver $y(n)$ de la question c.
e. Calculer $Y(z)$ transformée en Z de $y(n)$ et la TZ inverse de $Y(z) \times H_i(z)$.