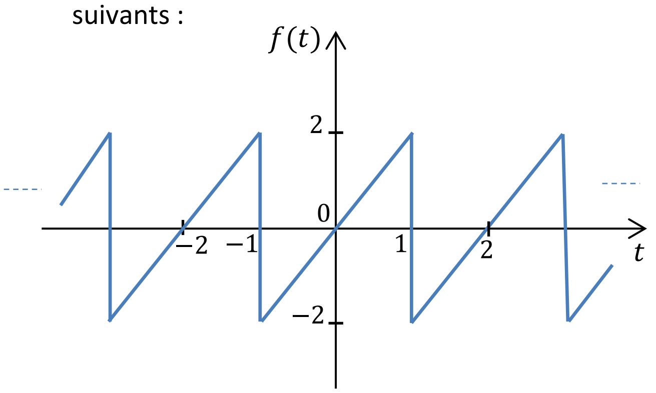
Séries de Fourier des Signaux Périodiques

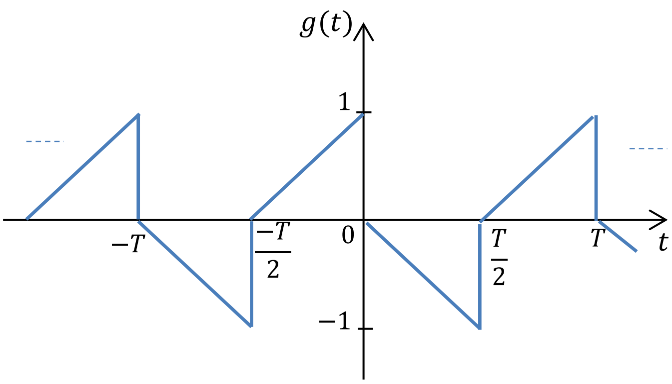
Séries de Fourier des Signaux Périodiques		
Séries de Fourier de $x(t)$ avec période T_0	$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cos(2\pi n f_0 t)$	
Calcul des coefficients	$\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi n f_0 t)\, dt$ $n = \mathbf{0}, 1,2, \dots \dots + \infty$	$\boldsymbol{b_n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, sin(2\pi n f_0 t)\, dt$ $n = \mathbf{1}, 2, \dots \dots + \infty$
Séries de Fourier Complexes de $x(t)$ $f_0 = \frac{1}{T_0}$ fréquence de $x(t)$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{j2\pi n f_0 t} \rightarrow C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt$	

Exercice 2.1 Développer sous forme de série de Fourier complexe (bilatérale) le signal suivant :

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0\, t + 2 \cos \omega_0\, t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 2.2 Calculer les coefficients de Fourier complexes pour les deux signaux périodiques suivants :





Exercice 2.3 Soit un signal $f(t)$ de période 2π tel que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -\pi \le t \le 0 \\ 0 & si \quad 0 < t < \pi \end{cases}, \quad sur\ \ une\ période.$$

a. Tracer le graphe de ce signal dans l'intervalle $-2\pi \le t \le 2\pi$.
b. Montrer que la série de Fourier de $f(t)$ dans l'intervalle $-\pi \le t \le \pi$ est égale à :

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right]$$

c. Par un choix approprié de t , montrer que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Intégrale de Fourier des Signaux Non-périodiques

Exercice 2.4 Sachant que le signal échelon unité $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = \frac{1}{2}\left(1 + sgn(t)\right)$

$$où\ la\ fonction\ signe\ notée\ sgn\ ,\ \ est\ définie\ par\ :$$

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & pour\ t > 0 \\ -1 & pour\ t < 0 \end{cases} = \lim_{a\to 0} e^{-a|t|}\, sgn(t)\ = \lim_{a\to 0} \begin{cases} e^{-at} & pour\ t > 0 \\ -e^{at} & pour\ t < 0 \end{cases}, avec\ a > 0$$

Trouver la transformée de Fourier de $u(t)$.

Exercice 2.5 Sachant que le signal échelon unité $u(t)$ peut s'écrire sous la forme $u(t) = \frac{1}{2}\left(1 + sgn(t)\right)$

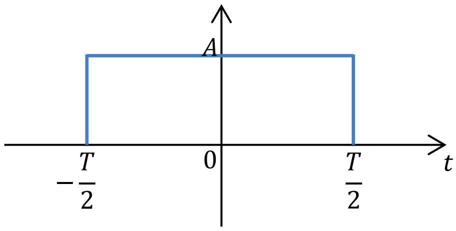
$$où\ la\ fonction\ signe\ notée\ sgn\ ,\ \ est\ définie\ par\ :$$

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & pour\ t > 0 \\ -1 & pour\ t < 0 \end{cases} = \lim_{a\to 0} e^{-a|t|}\, sgn(t)\ = \lim_{a\to 0} \begin{cases} e^{-at} & pour\ t > 0 \\ -e^{at} & pour\ t < 0 \end{cases}, avec\ a > 0$$

Trouver la transformée de Fourier de $u(t)$.

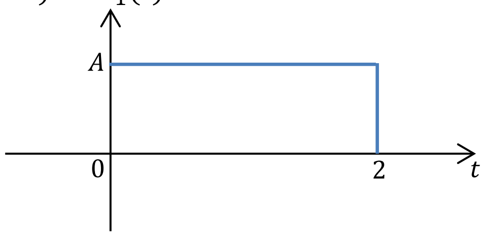
Exercice 2.6 Trouver la transformée de Fourier des signaux suivants :

a.) $s(t) = A\, rect_T(t) = A\, rect(\frac{t}{T})$



et

$b.)$ $s_1(t)$



$$s(t) = A\, rect_T(t) = A\, rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & si\ \ |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}\ ;\ fenêtre\ rectangulaire\ ou\ signal\ porte$$

$$d'ouverture\ (ou\ largeur\ )T\ et\ d'amplitude\ (ou\ hauteur)\ A$$

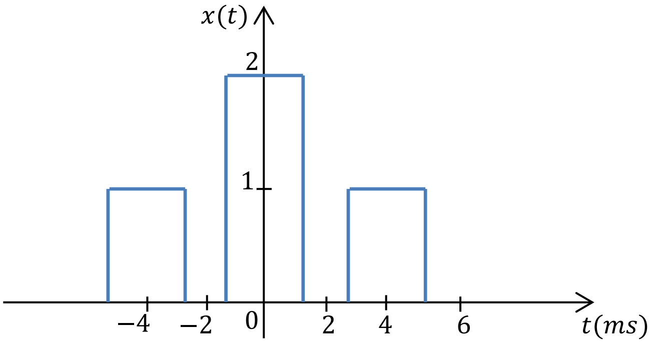
Exercice 2.7 Tracer le graphe et trouver la TF pour le signal suivant :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & pour\ \ -1 \le t \le 0 \\ 2 & pour\ \ 0 \le t \le 1 \\ 1 & pour\ 1 \le t \le 2 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

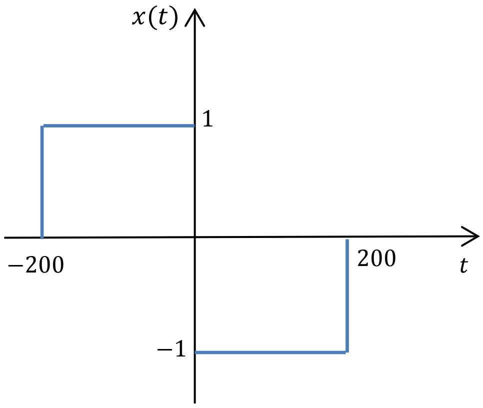
Exercice 2.8 Trouver la transformée de Fourier du signal complexe $x(t)$ donné par :

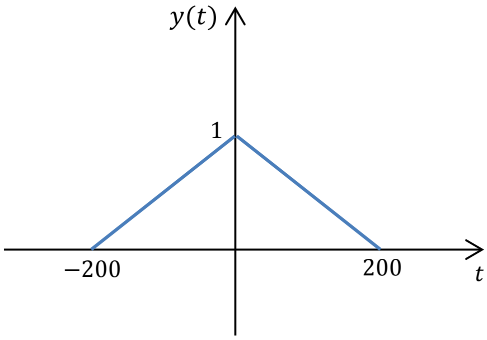
$$x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t} & si\quad |t| \le 1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Exercice 2.9 A partir de la seule observation du signal temporel x(t) de la figure suivante, précisez ce que vaut sa densité spectrale en f=0 Hz puis calculer et tracer sa transformée de Fourier.



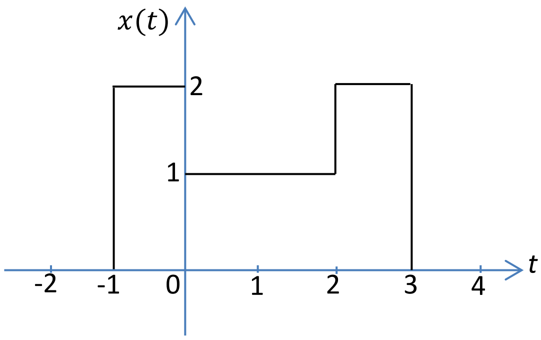
Exercice 2.10 Partant de la transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculer la TF de x(t) et y(t) ci-dessous :





Exercice 2.11 Le signal $x(t)$ est représenté par son graphe ci-dessous. On note $X(f)$ sa transformée de Fourier. Répondre aux questions suivantes sans faire de calcul explicite de $X(f)$:

a. $X(f)$ est-elle périodique ? Si oui donner sa période.
b. $X(f)$ est-elle un signal continu ou discret ?
c. Donner la valeur de $X(0)$
d. Donner $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$.



Théorème de Parseval

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant pour TF $X(f)$ et $Y(f)$ respectivement.

$$Théorème\ de\ Parseval: \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)^* \, df$$

$$dans\ la\ cas\ particulier\ \ y(t) = x(t)\ on\ a :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

- L'énergie est conservée dans la représentation temporelle et fréquentielle des signaux.

Exercice 2.12 utiliser le théorème de Parseval pour calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t) \, dt \quad et \ \ I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(t) \, dt \ \ où\ sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\ , le\ sinus\ cardinal.$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} sin^2(2\pi t)\ sinc^2(t) \, dt$$

Convolution des Signaux

Exercice 2.13 Convolution Soit le signal échelon unité $f(t) = E_0.u(t)$ d'amplitude E_0 , représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (auto-convolution).

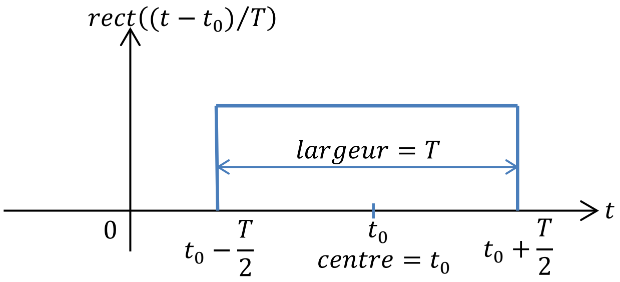
Exercice 2.14 Calculer l'intégrale de convolution des deux signaux suivants :

$$f(t) = e^{3t}u(t) \; et \; g(t) = e^{7t}u(t), \quad u(t): un \; échelon \; unité$$

Exercice 2.15 Trouver l'intégrale de convolution des signaux causaux $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et t^2 et calculer cette intégrale pour $t = 4$.

Exercice 2.16 On définit la fonction porte par : $rect(t/T) = \begin{cases} 1 \; si \quad |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 \quad autrement \end{cases}$,

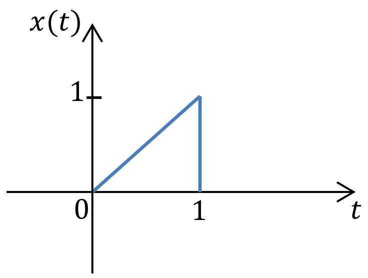
et d'une façon générale le graphe de $rect((t - centre)/largeur)$ est illustré par la figure ci-dessous,



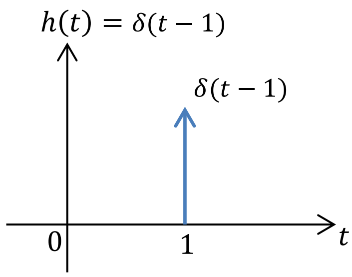
Trouver la convolution $f(t) * g(t)$ des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ exprimées par :

$$f(t) = 3 \, rect\left(t - \tfrac{1}{2}\right) + rect((t-2)/2 \; et \; g(t) = rect(\,t/2),$$

Exercice 2.17 Déterminer le signal $y(t) = x(t) * h(t)$, convolution de $x(t) et \; h(t)$, donnés par leurs graphes suivants :



et



- **Calcul de la convolution à l'aide de la transformée de Laplace**

Il est très important de savoir calculer la transformée de Laplace d'un signal pour faciliter le calcul de la convolution entre deux signaux. On rappelle que pour deux signaux $f(t)\ et\ g(t)$, on définit la transformée de Laplace, notée $\mathcal{L}[.]$, par:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \ \ et\ \ \mathcal{L}[g(t)] = G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}\,dt$$

On montre que $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p).G(p) \ \ et\ que\ \ f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p).G(p)]$

Exercice 2.18 Sachant que $\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{p+a}$, $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, calculer la convolution des signaux $f(t) = e^{-t}u(t) \ \ et\ \ g(t) = \sin(t)$.

Auto et Inter-Corrélation des Signaux Déterministes

Exercice 2.19 Soient deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$identiques à un retard et un affaiblissement près :$y(t) = a\,x(t - t_0)$. On connait l'énergie de $x(t), E_x = R_{xx}(0)$. Montrer comment peut-on déterminer l'affaiblissement a et le retard t_0 par inter-corrélation des deux signaux ?

Exercice 2.20 On se donne un signal réel $x(t)$, de fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ et de densité spectrale $S_{xx}(f)$.

On demande pour $y(t) = x(t + t_0) - x(t - t_0)$ de :

a. Calculer la fonction d'autocorrélation de $y(t)$.
b. Calculer sa densité spectrale
c. Traiter l'exemple où $x(t) = rect(t/T)$ et $t_0 = \frac{T}{2}$.

Exercice 2.21 Calculer et comparer les fonctions d'autocorrélation des deux signaux sinusoïdaux de base :

$$s_1(t) = A\sin(2\pi f_0 t) \quad et \quad s_2(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

On suppose que les spectres de ces 2 signaux sont connus et tels que :

$$S_1(f) = \frac{jA}{2}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \quad et \quad S_2(f) = \frac{A}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

Exercice 2.22 Effectuer graphiquement et analytiquement la convolution et la corrélation des 2 signaux suivants :