L1 Informatics
Algebra 2

Badji Mokhtar – Annaba University
Faculty of Technology
Department of Informatics

2023/2024
Dr. Neggal bilel

Series of Exercises 03
The Matrices and Solving Systems of Equations

exercice 1 *Let the matrices :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculate : $A+B, A-B, 2A, -3B, A \times B, A^2, B^t$.

exercice 2 *Calculate the determinant of the following matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

exercice 3 *Let the matrix :* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Is A invertible ? If yes, determine its inverse A^{-1}.*
2. *Calculate A^2, then find two real numbers α and β,tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ with I_3 is the identity matrix. Deduce A^{-1} again.*

exercice 4 *Let $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ The canonical basis of $\mathbb{R}^3$. We consider an endomorphism of $\mathbb{R}^3$ defined by : $f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$ et $B' = \{v_1 = (1,2,0); v_2 = (-1,0,-1); v_3 = (0,1,0)\}$ a basis of $\mathbb{R}^3$.*

1. *Find the matrix A associated with f in the canonical basis B.*
2. *Find the rank of A.*
3. *Find the transition matrix P from the canonical basis B to the basis B'.*
4. *Find the transition matrix Q from B' to B. What is the relationship between P and Q ?*

exercice 5 *Let the following matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculate all possible products of two matrices chosen from the three matrices. Justify your answer*
2. *Let $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be the endomorphism whose matrix with respect to the canonical basis $\{e_1, e_2\}$ of $\mathbb{R}^2$ is A, Find $f(x,y)$?*

3. *Let* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *be the endomorphism whose matrix with respect to the canonical basis* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *of* $\mathbb{R}^3$ *is* C*, Find* $g(x, y, z)$ *?*
4. *Determine if the matrices are invertible ?*

exercice 6 *Let the following system of equations :*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. *Show that this system is a Cramer's system.*
2. *Find the solution of the system (2).*

Série de TD 03
Les matrices et Résolution de systèmes d'équations.

Exercice 1 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer : $A+B, A-B, 2A, -3B, A \times B, A^2, B^t$.

Exercice 2 *Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *A est elle inversible ? si oui déterminer son inverse A^{-1}.*
2. *Calculer A^2, puis trouver deux réels α et β,tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ avec I_3 est la matrice identité, déduire une autre fois A^{-1}.*

Exercice 4 *Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par : $f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$ et $B' = \{v_1 = (1,2,0); v_2 = (-1,0,-1); v_3 = (0,1,0)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Déterminer la matrice A associée à f dans la base canonique B.*
2. *Déterminer le rang de A.*
3. *Déterminer la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.*
4. *Déterminer la matrice de passage Q de B' vers B. Quel est le lien entre P et Q ?*

Exercice 5 *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer tous les produits possibles de deux matrices choisie parmi les trois matrices. Justifier votre réponse.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est A, que vaut $f(x,y)$?*

3. *Soit* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est* C*, que vaut* $g(x, y, z)$ *?*
4. *Déterminer si les matrices sont inversibles ?*

Exercice 6 *Soit le système d'équation suivant :*

$$\begin{cases} x - 3y + 6z = 3 \\ 6x - 8y + 12z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{cases} \tag{2}$$

1. *Démontrer que ce système est un système de Cramer.*
2. *Trouver la solution du système (2).*