FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE CONTINU ET INVARIANT

I – Fonction de transfert ou transmittance d'un système

1. Fonction de transfert, transmittance d'un système, bloc de transfert

A partir de l'équation différentielle d'un SLCI, il est possible de déterminer une fonction (appelée fonction de transfert) qui caractérise le comportement du SLCI. Le **schéma-blocs fonctionnel** peut alors être mis sous la forme d'un **schéma-blocs** qui contient toutes les informations nécessaires pour simuler le système global.

Soit un Système Linéaire Continu invariant à monovariable. Si le système est dans les conditions d'Heaviside, on définit la fonction de transfert du système par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{S.L.C.I}} \longrightarrow s(t)$$

$$e(t) \xrightarrow{L} E(p) \quad s(t) \xrightarrow{L} E(p)$$

Remarques :

- Les informations fournies par H(p) sont limitées, car les C.I. n'interviennent pas.
- La transformée inverse de H(p) n'a pas de sens physique.
- Dans le cas de multi-variables, on définit une matrice de transfert.
- La fonction de transfert caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie.

Exemple : reprenons l'exemple du **SEGWAY®** :

Dans la chaîne d'action se trouve l'ensemble **chariot** + **conducteur**. Cet ensemble est régit du point de vue dynamique par l'équation différentielle suivante : $a\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} = b\,Cm(t) + c\,\beta(t)$.

Dans les conditions d'Heaviside, on peut écrire en symbolique :

$$a\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} = b\,Cm(t) + c\,\beta(t) \xrightarrow{L} [ap^2 - c]\,\beta(p) = b\,Cm(p)$$

Soit $H_m(p)$ fonction de transfert de l'équipage mobile : $H_m(p) = \dfrac{\beta}{C_m(p)} = \dfrac{b}{ap^2 - c}$

$$Cm(p) \longrightarrow \boxed{\mathbf{H_m(p)}} \longrightarrow \beta(p)$$

Dans les chaînes de retour on trouve :

Le **gyromètre :** $u_v(t) = K_v\,\dfrac{d(\psi(t))}{dt}$ Le **pendule :** $u_p(t) = K_p\,\psi(t)$

Et de même dans les conditions d'Heaviside, le passage en symbolique donne :

$H_g(p)$ fonction de transfert du gyromètre :

$$H_g(p) = \frac{U_V(p)}{\Psi(P)} = \frac{K_V}{p}$$

$$\Psi(p) \longrightarrow \boxed{\mathbf{H_g(p)}} \longrightarrow U_V(p)$$

$H_p(p)$ fonction de transfert du gyromètre :

$$H_P(p) = \frac{U_P(p)}{\Psi(P)} = K_P$$

$$\Psi(p) \longrightarrow \boxed{\mathbf{H_P(p)}} \longrightarrow U_P(p)$$

2. Systèmes particuliers : intégrateurs et dérivateurs

 # Système intégrateur : un système sera dit intégrateur (intégration physique du signal d'entrée) lorsque la fonction de transfert aura un *pôle en $p = 0$*.

 # Système dérivateur : de même un système sera dit dérivateur, lorsque la fonction de transfert aura un *zéro en $p = 0$*.

Remarque : cela se comprend bien à partir des théorèmes sur la dérivation et sur l'intégration (*Transformées de Laplace p2 et p3*).

3. Forme canonique d'une fonction de transfert

On définit la forme canonique d'une fonction de transfert en mettant en facteur le terme de plus bas degré au numérateur et au dénominateur. C'est sous cette forme, que la fonction de transfert sera utilisée dans les études d'asservissement.

- **L'ordre** est alors le degré du dénominateur après simplification.
- Le **gain** est la constante apparaissant en facteur au numérateur

La forme générale canonique d'un système est alors :

$$H(p) = K \frac{G(p)}{p^{\alpha}[1 + b_1 p + \ldots + b_n p^n]}$$

avec : $G(0) = 1$;

K gain (statique si $\alpha = 0$) ;

α le nombre d'intégrateurs

Forme canonique d'un système du premier ordre, obtenue à partir de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (voir Ch-III, §III 2.) :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t) \xrightarrow{L} S(p)\,[1 + \tau p] = K\, E(p)$$

$$\boxed{E(p) \longrightarrow \boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}} \longrightarrow S(p)}$$

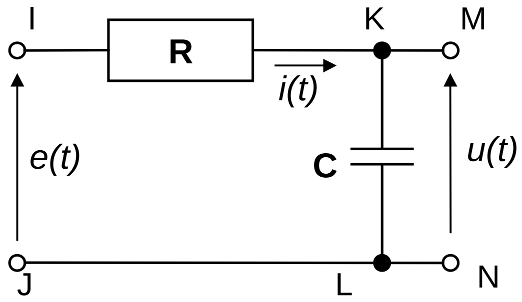
Avec τ, **constante de temps** (> 0) en secondes, et **K gain statique** du système

Exemple :

Circuit RC, condensateur déchargé à l'instant t = 0.
A partir de l'équation définie Ch-III on trouve :

$$H(p) = \frac{1}{1+RCp}$$

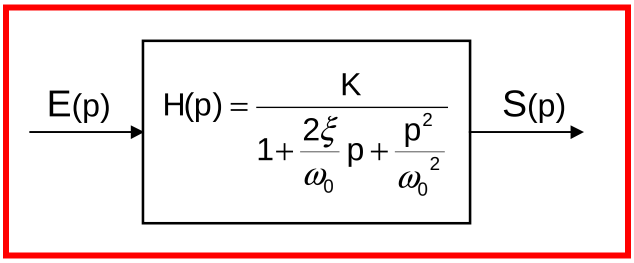
Le circuit RC proposé est donc d'un système du premier ordre, de constante de temps τ = RC et de gain statique **K = 1**.



\# **<u>Forme canonique d'un système du deuxième ordre</u>**, obtenue à partir de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre (voir Ch-III, §III 3.) :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2\, s(t) = K\, \omega_0^2\, e(t)$$

(dans les conditions d'Heaviside)



ξ coefficient d'amortissement ;
ω_0 pulsation propre des oscillations non amorties du système ;
K est toujours le **gain statique** du système.

ξ : *sans unité* ω_0 : *rad.s^{-1}*

Exemple :

Système masse / ressort, dans les conditions d'Heaviside.
A partir de l'équation définie Ch-III on trouve :

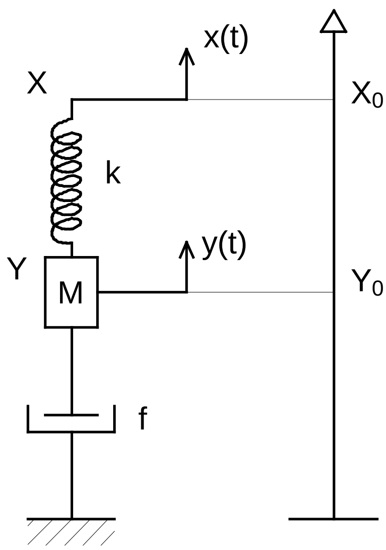
$$H(p) = \frac{1}{1+\frac{f}{k}p+\frac{m}{k}p^2}$$

Le système masse/ressort est donc d'un système du deuxième ordre avec :

- Coefficient d'amortissement : $\xi = \dfrac{f}{2\sqrt{m\,k}}$

- Pulsation propre : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

- Gain statique : $K = 1$



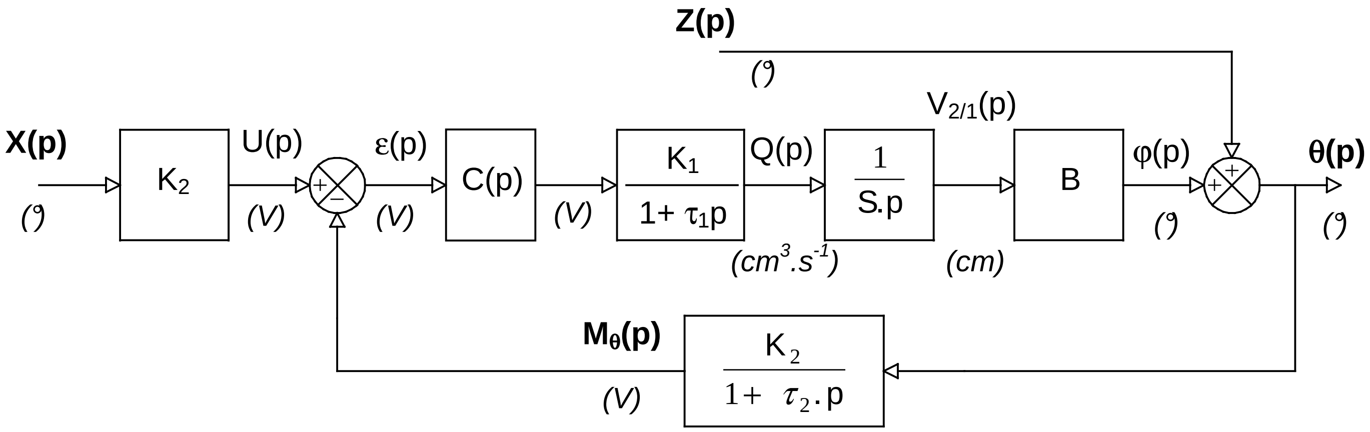
II – Fonctions de transfert des systèmes bouclés

1. Le schéma-blocs

Un système réel comprend en général de multiples sous-systèmes plus simples, correspondant à divers composants technologiques (électricité, mécanique hydraulique...).

On peut associer à chaque sous-système une transmittance, le diagramme fonctionnel peut alors être mis sous la forme d'un schéma-blocs qui contient toutes les informations nécessaires pour **simuler** le système global.

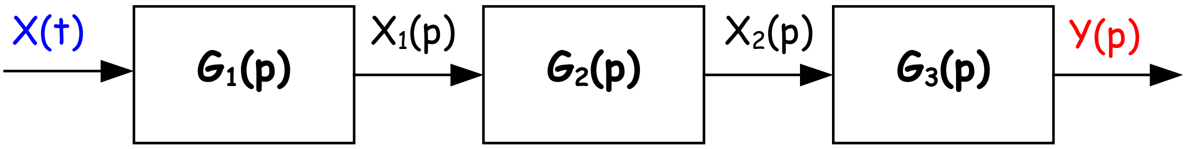
Exemple : dispositif de compensation de la Nacelle à flèche télescopique



Il est maintenant naturel de se poser la question de la détermination éventuelle de la fonction de transfert globale du dispositif. Pour cela il est nécessaire définir quelques opérations sur les blocs.

2. "Opérations" sur un schéma-blocs

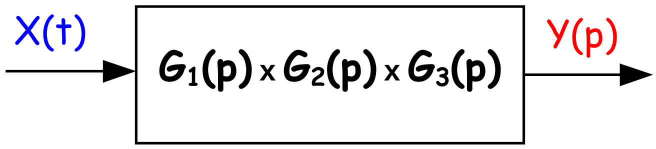
2.1. Blocs en série (en cascade)



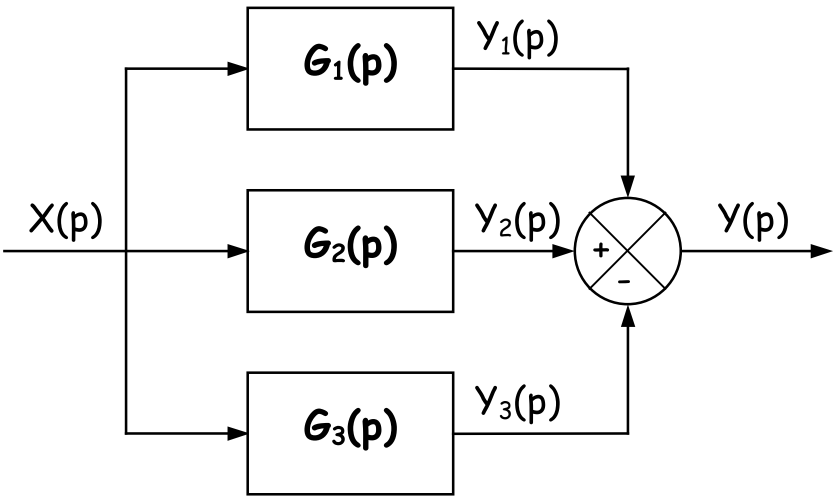
On trouve pour chaque bloc :

$X_1(p) = G_1(p)\,X(p)$; $X_2(p) = G_2(p)\,X_1(p)$; $Y(p) = G_3(p)\,X_2(p)$

On trouve aisément par combinaison : $G(p) = G_1(p)\,G_2(p)\,G_3(p)$



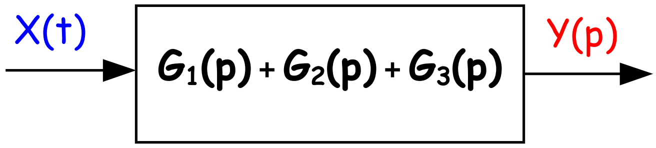
2.2. Deuxième cas : blocs en parallèle



On trouve pour chaque bloc :

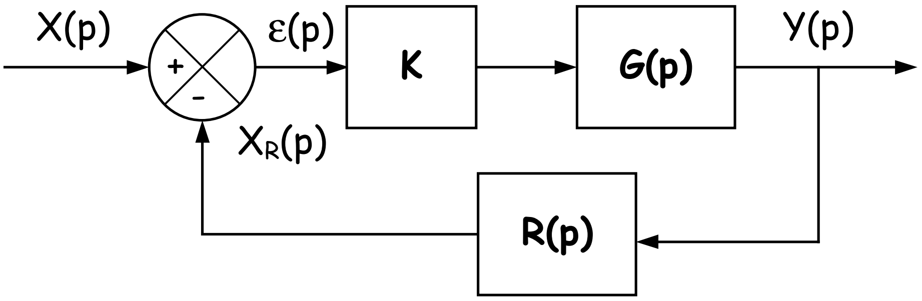
$Y_1(p) = G_1(p)\,X(p)$
$Y_2(p) = G_2(p)\,X(p)$
$Y_3(p) = G_3(p)\,X(p)$

On trouve aisément par combinaison : $G(p) = G_1(p) + G_2(p) + G_3(p)$



3. Fonction de transfert en boucle ouverte F.T.B.O.

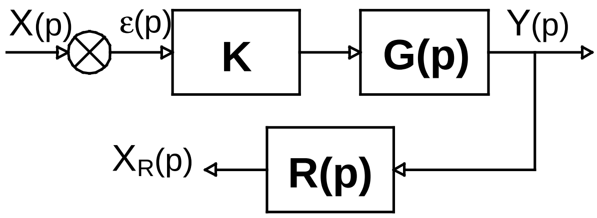
On considère le système bouclé dont le diagramme fonctionnel est donné ci-dessous :

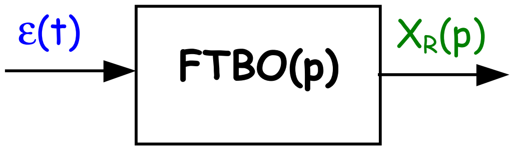


Pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires continus invariants asservis certains outils utilisent la fonction de transfert du système non bouclé.

On considère le système dans son ensemble (avec la chaîne de retour qui interviendra lors du fonctionnement du système bouclé), mais non fermé au niveau du comparateur. Cette étude sera utile dans l'analyse des performances du système.

On exprime alors la relation entre le retour $X_R(p)$, et l'entrée $\varepsilon(p)$. Les trois blocs sont en série (cascade).





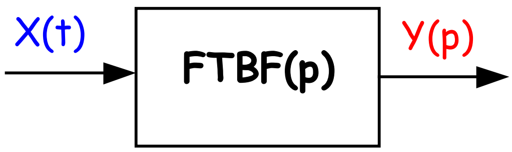
$$\boxed{O(p) = FTBO(p) = \frac{X_R(p)}{\varepsilon(p)} = K\,G(p)\,R(p)}$$

Remarque : ne pas confondre la FTBO, avec la fonction de transfert de la chaîne directe, K.G(p). La fonction de transfert en boucle ouverte est égale au produit des fonctions de transfert de la chaîne directe, et de la chaîne de retour.

4. Fonction de transfert en boucle fermée F.T.B.F.

On procède maintenant à l'analyse du système bouclé. En appliquant les règles précédentes, on obtient facilement la F.T.B.F., H(p).

$$F(p) = FTBF(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K.G(p)}{1 + K.G(p).R(p)}$$



Remarque : on peut exprimer la fonction de transfert en boucle fermée ainsi,

$$FTBF(p) = \frac{[\text{chaîne d'action}]}{1 + FTBO(p)}$$

5. Fonction de transfert réduite

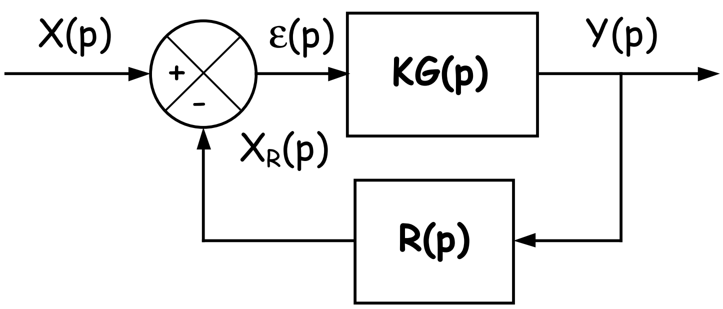
L'étude du comportement d'un système en réponse harmonique (entrée sinusoïdale) met en évidence l'utilisation d'un système à retour unitaire (voir l'étude du diagramme de Black en deuxième année).

Pour cela on définit un système équivalent, qui comprend un système réduit à retour unitaire :

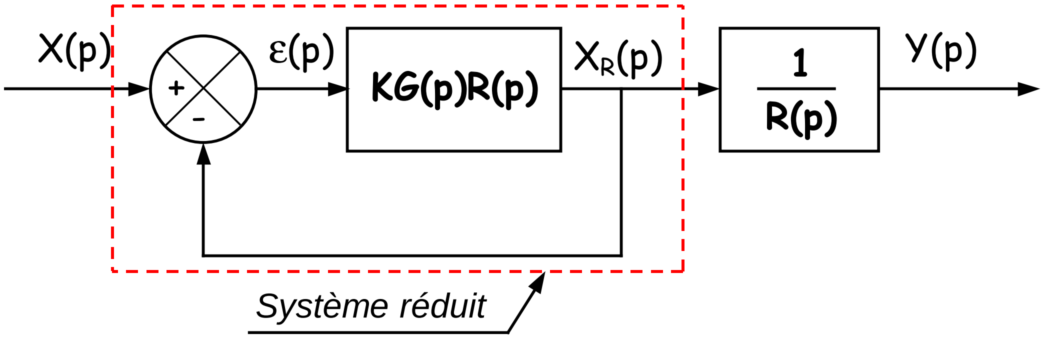
Système à retour non unitaire

$$FTBO(p) = O(p) = K.G(p).R(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K.G(p)}{1 + K.G(p).R(p)}$$



Système équivalent



$$O_R(p) = O(p) = K.G(p).R(p)$$ *même fonction de transfert en boucle ouverte*

$$F_R(p) = \frac{X_R(p)}{X(p)} = \frac{K.G(p).R(p)}{1+K.G(p).R(p)} = \frac{O(p)}{1+O(p)}$$

Système équivalent :

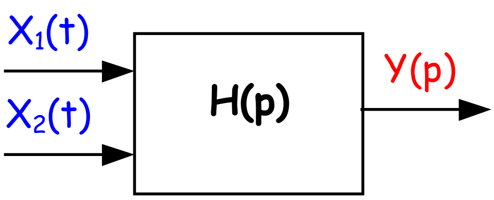
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H_R(p)}{R(p)} = F(p)$$ *même fonction de transfert en boucle fermée*

Le système réduit, est un système à retour unitaire, qui permet ainsi certaines études de comportement. La fonction de transfert réduite $F_R(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée de ce système.

III - Principe de superposition

1. Cas d'un système à plusieurs entrées

Soit un système de fonction de transfert H(p), sollicité par deux entrées $X_1(p)$ et $X_2(p)$. On note Y(p) la sortie de ce système.



Annulons l'entrée $X_2(p)$ alors on trouve : $Y_1(p) = H(p)\, X_1(p)$

De même annulons l'entrée $X_1(p)$ on trouve : $Y_2(p) = H(p)\, X_2(p)$

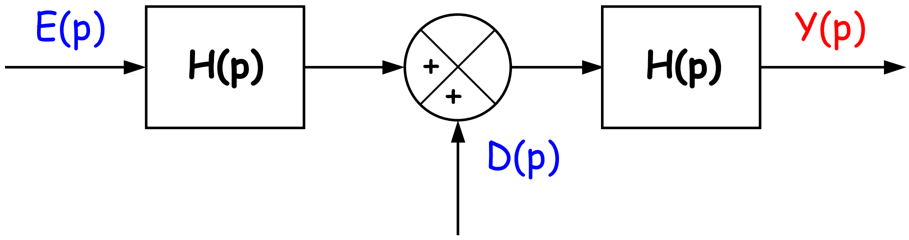
***Principe de superposition* :**

Ce principe stipule que dans le cas où les deux entrées sont existantes, alors la sortie du système est :

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$$

2. Autre application

Soit un système constitué de deux blocs de fonction de transfert H(p) et G(p), sollicité par une entrée E(p), et une seconde entrée D(p) pouvant représenter des perturbations. On note Y(p) la sortie de ce système.



Là encore on procède de la même façon en annulant successivement les deux entrées, puis on applique le principe de superposition.

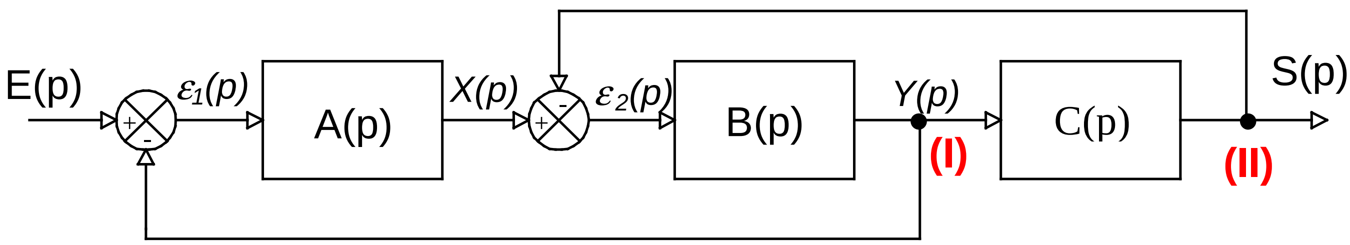
Annulons l'entrée D(p) alors on trouve : $Y_E(p) = H(p)\ G(p)\ E(p)$
De même annulons l'entrée E(p) on trouve : $Y_D(p) = H(p)\ D(p)$

Et ainsi : $Y(p) = Y_E(p) + Y_D(p) = H(p)\ [\ G(p)\ E(p) + D(p)\ ]$

EXERCICES D'APPLICATION

Ex. 1 - *Boucles imbriquées*

Soit le système défini par le schéma fonctionnel ci-dessous :

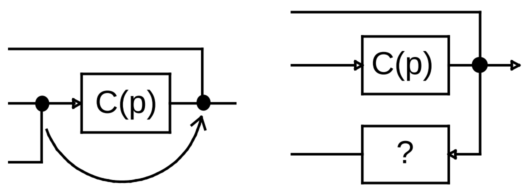


Déterminer la fonction de transfert de ce système par deux méthodes différentes :

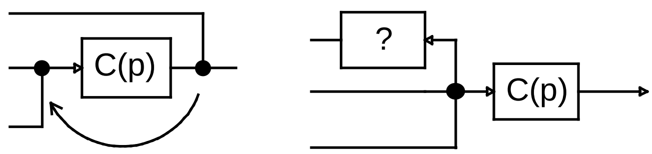
1. Par calcul.

2. Par réduction du schéma-blocs. Cette méthode est assez pratique d'utilisation, avec un peu d'expérience, elle est succinctement présentée ci-dessous. Il s'agit de déplacer les jonctions, en modifiant en conséquence la chaîne fonctionnelle de la branche correspondante. Il peut y avoir plusieurs solutions.

\# Déplacement de la jonction de (I) en (II) :



\# Déplacement de la jonction de (II) en (I) :

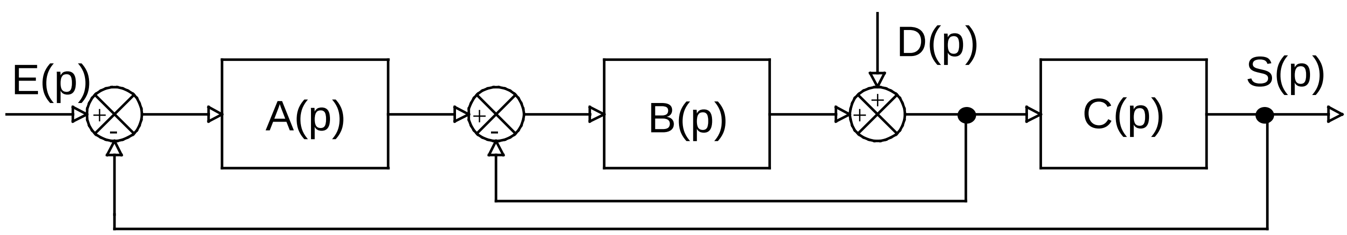


On obtient alors dans les deux cas un schéma-blocs où les deux boucles sont séparées (il y en a une à l'intérieur de l'autre) et on peut les réduire séparément.

Pour une des deux modifications, établir le schéma-blocs correspondant, puis réduire la boucle interne en déterminant simplement sa fonction de transfert. Réduire la deuxième boucle, et conclure en déterminant la fonction de transfert globale. Vérifier que le résultat est identique au (1.)… !

Ex. 2 - *Systèmes à deux entrées*

Soit le système défini par le schéma fonctionnel ci-dessous (système à deux entrées) :

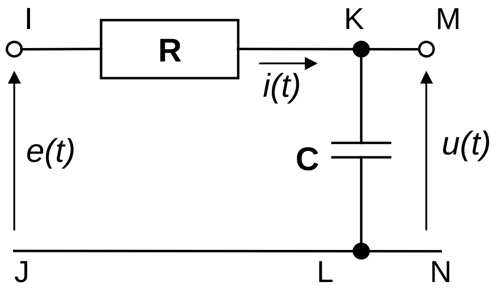


1. Calculer les deux transmittances, en annulant successivement une des deux entrées, par calcul, puis par réduction du schéma-blocs.

2. Déterminer alors l'expression de la sortie S(p) en fonction des deux entrées E(p) et D(p).

<u>Ex. 3</u> - *Circuit RC*

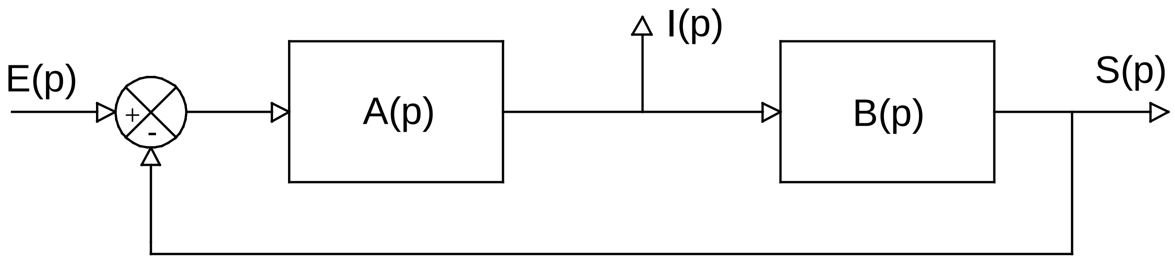
Reprenons le système correspondant au circuit RC.



1. Réécrire la fonction de transfert de ce système, puis donner le schéma fonctionnel le plus simple correspondant (un seul bloc).

2. Le schéma fonctionnel peut se faire selon différents niveaux, suivant les informations que l'on souhaite utiliser.

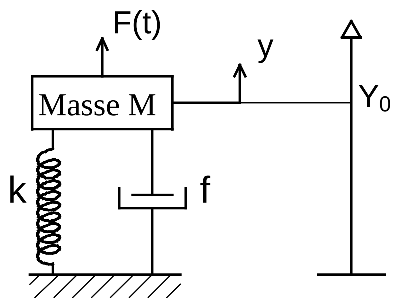
Montrer que l'on peut mettre la transmittance du circuit RC sous la forme du schéma-blocs ci-dessous, en explicitant les deux blocs A(p) et B(p). Rem : I(p) est une sortie permettant de visualiser le courant circulant dans le circuit.



<u>Ex. 4</u> - *Suspension d'automobile*

Soit une modélisation simplifiée d'une suspension d'automobile.

Il s'agit d'un système Masse - Ressort - Amortisseur. On considère le système en équilibre à l'instant initial, et la masse M est alors à la position Y_O. On notera y(t) les variations de position de ce point autour de sa position initiale.



1. A l'état d'équilibre statique, en l'absence de la force F(t), seul le ressort exerce une force sur la masse M. Ecrire alors l'équation correspondante.

2. On applique la force F(t) (force extérieure, comprenant l'action de la pesanteur) sur la masse. L'équation mécanique s'écrit alors comme l'égalité de cette force, et des forces inhérentes au système :

F(t) = *[force de rappel du ressort + force de frottement + force d'inertie]*

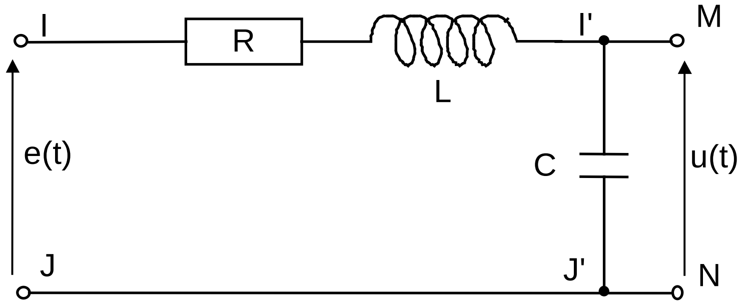
Ecrire alors cette équation (on pourra se reporter à l'exemple traité dans ce chapitre, et on précise que la force d'inertie est proportionnelle à M et à l'accélération du déplacement). Calculer ensuite la transmittance du système.

On pose $\omega_o = \left(\frac{k}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{f}{M} = 2\xi\omega_o$

Redonner alors l'expression la plus simple de la fonction de transfert en fonction de ξ et de ω_O.

Ex. 5 - *Circuit RLC*

Soit un circuit RLC classique, on se propose de déterminer la fonction de transfert, et l'ordre de ce sous-système.



1. Mettre en équations le système. Les équations qui régissent ce système sont bien sûr les équations de l'électricité.

2. A l'aide de la transformée de Laplace et des différents théorèmes déterminer la fonction de transfert du circuit. Quel est l'ordre de ce système? Identifier la fonction de transfert avec la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Préciser les expressions des trois données K, ξ et ω_0.

3. Donner alors une représentation du schéma fonctionnel, en faisant apparaître en entrée la tension E(p), et en sortie à la fois la tension U(p), et le courant I(p).

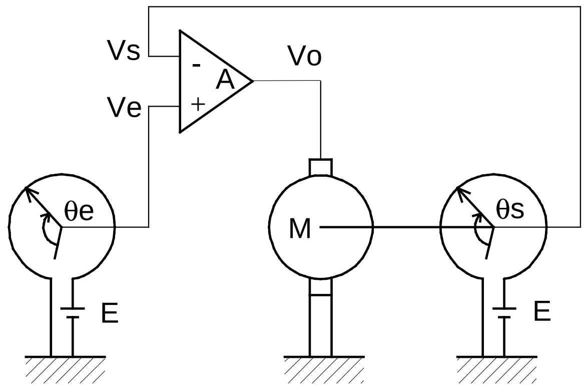
Ex. 6 - *Asservissement de position*

Soit le système de ***positionnement*** défini ci-après. Le principe est d'asservir la position angulaire d'un moteur, à la position angulaire d'un potentiomètre de commande. On trouve dans la chaîne fonctionnelle :

Un potentiomètre P1, qui réalise une conversion angle / tension.

Un amplificateur opérationnel, en montage soustracteur, qui réalise à la fois la comparaison entre les deux tensions, et l'amplification du résultat (Gain A).

Un moteur qui ici réalise une conversion tension / position.



Un potentiomètre de recopie P2, qui sert de capteur, et qui réalise une conversion angle / tension.

1. Etablir le schéma-blocs du système.

2. Fonctions de transfert des différents composants de la chaîne :

◆ ***Potentiomètres :*** ils possèdent une caractéristique linéaire ; on donne $0 < \theta < \theta_{max}$ et $0 < Ve < E$. Ecrire la relation temporelle entre $\theta_e(t)$ et $V_e(t)$. Déduire des caractéristiques la fonction de transfert de P_1, puis de P_2.

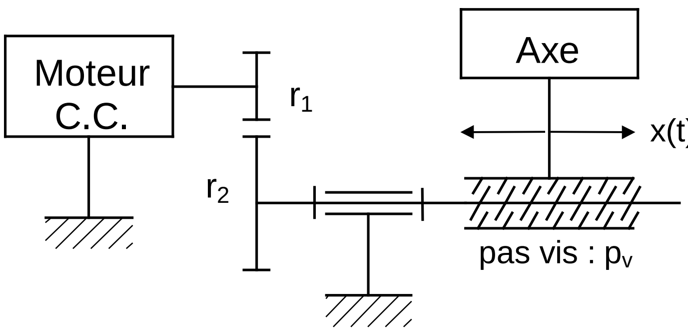
◆ ***Moteur :*** fonction de transfert du moteur à courant continu, commandé en courant :

$$H(p) = \frac{\theta_s(p)}{V_o(p)} = \frac{K_t}{p[K_e.K_t + (Jp + f)(Lp + R)]}$$

où Ke, Kt, R, L, sont des caractéristiques électriques du moteur, J l'inertie de l'ensemble en mouvement et f le coefficient de frottement fluide.

3. Donner les fonctions de transfert en B.O., et en B.F. du système. Préciser l'ordre du système

<u>Ex. 7</u> - *Axe motorisé asservi en vitesse*



Soit le système d'axe commandé par un moteur électrique à courant continu. On considère le système asservi dans un premier temps en vitesse x'(t). Le système comporte en outre, un amplificateur, pour la commande du moteur.

On choisit la modélisation du moteur commandé en courant (voir la modélisation complète d'un moteur à courant continu, dans une application ultérieure). On admettra la fonction de transfert donnée ci-après de ce type de commande, pour le moteur à courant continu.

Soit J, l'inertie totale de l'ensemble en mouvement ramenée à l'axe de rotation du moteur (voir dynamique des solides, en deuxième année).

Soit f coefficient de frottement fluide.

Le frottement sec sera négligé.

$$H_{moteur}(p) = \frac{k_m}{f + Jp}$$

La chaîne fonctionnelle comporte donc **:**

Le comparateur et l'amplificateur, de gain pur K_i.
Le moteur, de fonction de transfert $H_{moteur}(p)$, ***commandé en courant***.
La transmission mécanique (réduction par engrenage + système vis-écrou).
Un capteur de vitesse, qui donne l'image de la vitesse linéaire, sous forme d'une tension proportionnelle à cette vitesse. Le coefficient est μ_V.

1. Etablir le schéma fonctionnel de ce système (y faire figurer la nature des informations qui y circulent, et les unités). On établira un seul bloc pour l'ensemble de la transmission mécanique.

2. Décomposition de la transmission mécanique : engrenage + vis-écrou

Ecrire les relations temporelles reliant les vitesses de rotation (moteur et vis) et la vitesse de translation de l'axe, en fonction des caractéristiques de la chaîne mécanique. Déterminer alors les transformées de Laplace de ces deux équations, et en déduire les deux fonctions de transfert. De quel type de sous-système s'agit-il?

3. Retracer le schéma fonctionnel, avec l'ensemble des fonctions de transfert.

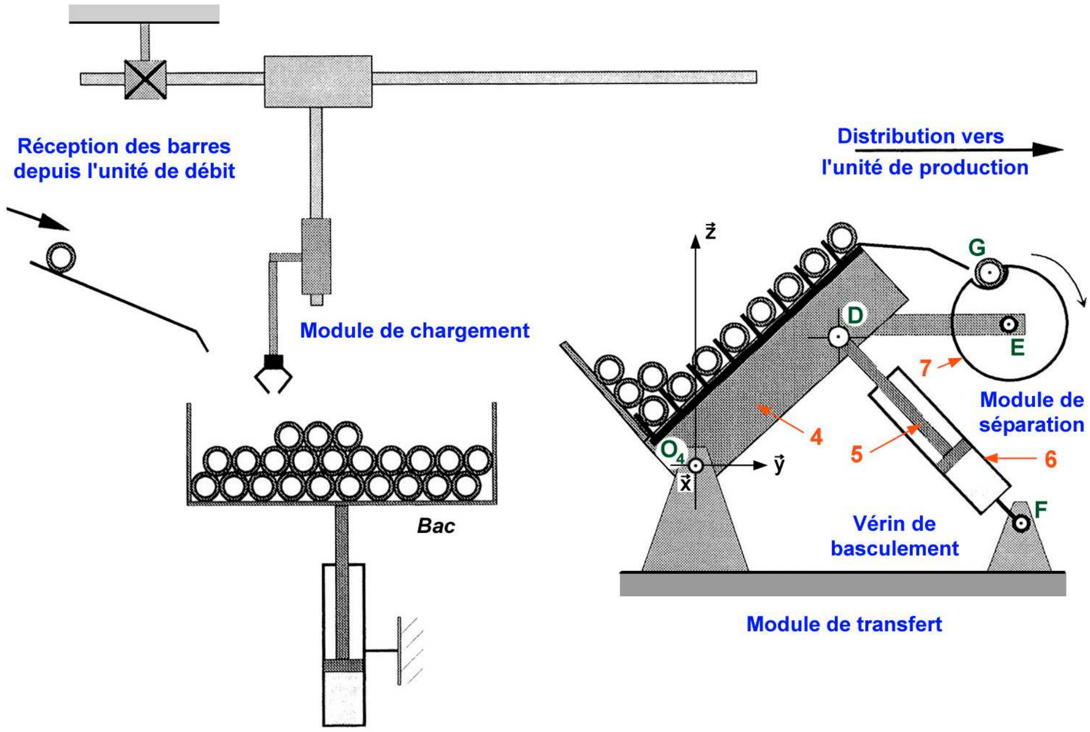
4. Déterminer les fonctions de transfert globales, du processus (chaîne d'action seule), du système en boucle ouverte, et du système en boucle fermée.

Ex. 8 - *Système de distribution automatique de barres*

Présentation : Le rôle de ce dispositif automatisé est de stocker, séparer et distribuer en familles de pièces des barres ou des tubes entrant dans la fabrication de radiateurs de chauffage central. Ces barres ou tubes, de divers matériaux, sont de diamètre compris entre 10mm et 60mm et de longueur comprise entre 200 mm et 1200 mm.

Placé entre une unité de débit et une unité de production, ce système de distribution de barres comprend trois modules :

- un MODULE DE CHARGEMENT composé d'un bac tampon recevant les barres de l'unité de débit et d'un manipulateur transférant les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert.
- un MODULE DE TRANSFERT pour le transfert des barres jusqu'au module de séparation.
- un MODULE DE SEPARATION qui fournit les barres une à une au processus de production à l'aide d'un plateau à encoche, et ce, à la cadence de fonctionnement demandée.



Asservissement de la position du bac du module de chargement

Les barres arrivent de l'unité de débit et sont consommées par l'unité de production de manière très irrégulière. De ce fait, le nombre de barres stockées dans le bac est très variable. Le manipulateur qui transporte les barres depuis le bac jusque sur le module de transfert ne peut saisir les barres situées dans le bac qu'à une altitude fixe y_0. Il faut donc s'assurer que, quel que soit le degré de remplissage du bac, les barres situées sur le dessus soient constamment à cette hauteur y_0. Cette fonction est assurée par un asservissement en position étudié dans ce sujet.

L'altitude des barres dans le bac est asservie grâce à un vérin hydraulique associé à un électro-distributeur à commande proportionnelle. Le capteur de position est analogique.

L'ensemble formé du bac, de sa charge variable, de la tige et du piston du vérin est appelée **«équipage mobile»**. Sa position notée $y(t)$ est fonction de la masse d'huile, notée $m(t)$, contenue dans la chambre d'admission du vérin. L'équation temporelle reliant ces grandeurs est la suivante :

$$y(t)+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}=K_m m(t) \quad (1)$$

Avec : $a_1=0{,}3\ s$; $a_2=45{,}9\ 10^{-3}\ s^2$ et $K_m=2\ m.kg^{-1}$

La pompe hydraulique à cylindrée auto-réglable alimente le distributeur proportionnel qui délivre un débit massique d'huile noté $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $u_r(t)$, coefficient $K_e = 0{,}2\ kg.s^{-1}.V^{-1}$.

Le capteur de position délivre une tension notée $u_m(t)$ proportionnelle à l'altitude $y(t)$ des barres, coefficient $K_c=10\ V.m^{-1}$.

1. En utilisant la transformation de Laplace, déterminer la relation entre $Y(p)$ et $M(p)$, définissant la fonction de transfert de l'équipage mobile. Précisez les conditions nécessaires pour établir cette relation.

2. Quelle est la relation liant la masse d'huile m(t) contenue dans la chambre d'admission du vérin et le débit massique d'huile q(t) ? En déduire la relation liant M(p) et Q(p).

3. Représenter le schéma-blocs (système ouvert) avec les fonctions de transfert des constituants du système présenté sur la **figure 1**. On prendra :

- l'entrée du système : $U_r(p)$
- la sortie du processus : $U_m(p)$

4. Pour boucler le système, le signal de commande $U_r(p)$ est élaboré grâce à un comparateur-amplificateur de gain A (voir **figure 2**). Dessiner le schéma-blocs du nouvel asservissement.

5. Etablir les fonctions de transfert de l'asservissement de position en boucle ouverte et en boucle fermée sous forme littérale, puis numérique. Quel est l'ordre du système ? Définir pour l'équipage mobile les caractéristiques de la forme canonique de la fonction de transfert.

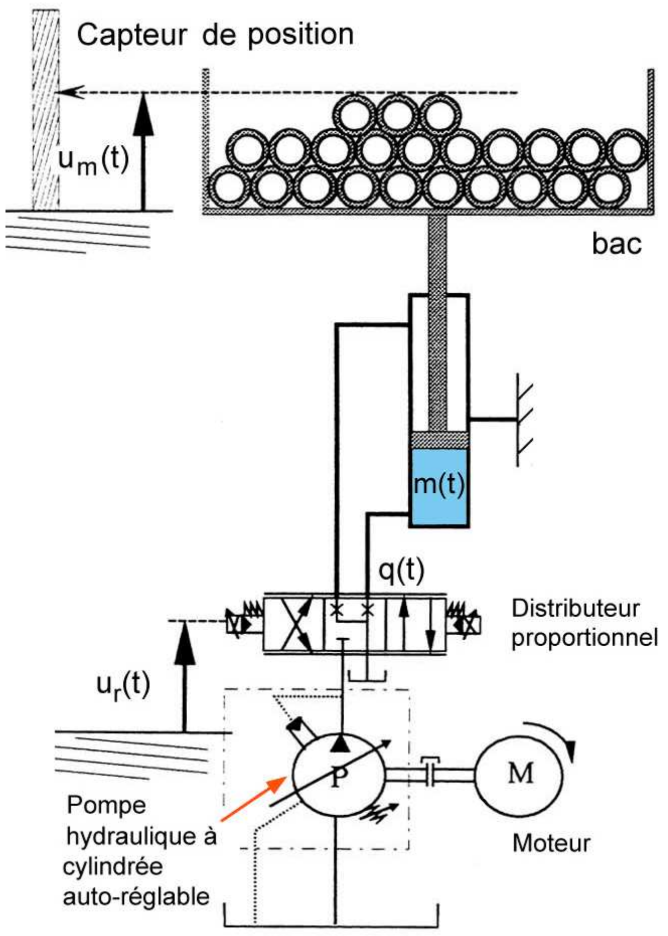


Figure 1

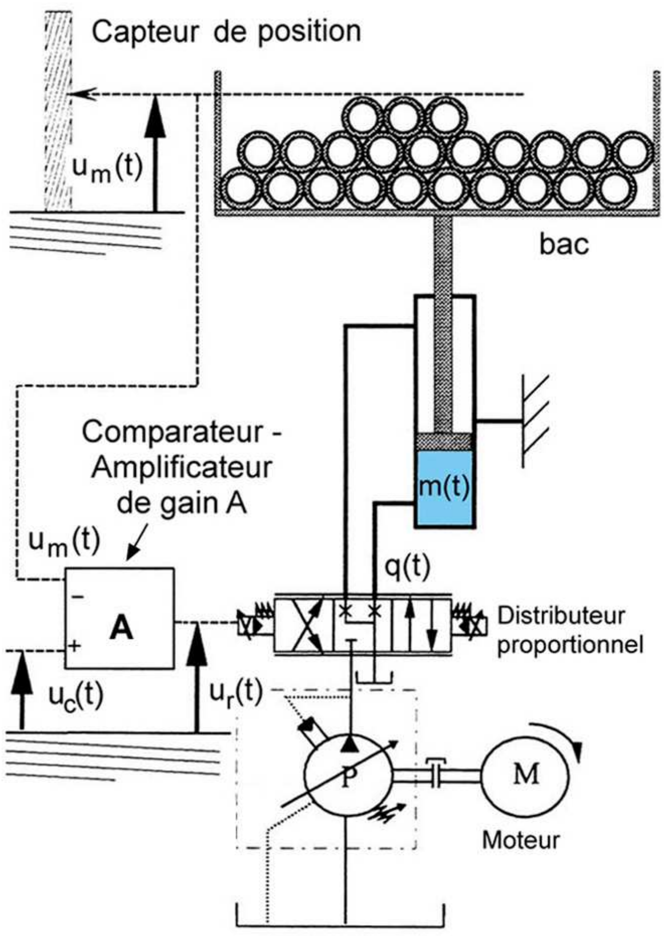


Figure 2