Exemple sur l'analyse de la variance à deux facteurs (ANOVA 2)

L'analyse de la variance à deux facteurs Si on garde le même exemple vu précédemment(Anova à un facteur) sur le caractère fibreux des viandes mais on suppose maintenant que 5 juges aient évalué une série de 3 échantillons et qui donnent des notes pour le caractère fibreux selon le tableau suivant :

Juge	A	B	C	moyennes
1	3	10	13	$\bar{y_{.1}}$ = 8,7
2	5	8	11	$\bar{y_{.2}} = 8$
3	6	5	7	$\bar{y_{.3}} = 6$
4	3	7	11	$\bar{y_{.4}} = 7$
5	3	5	8	$\bar{y_{.5}}$ = 5,3
	$\bar{y_{1.}} = 4$	$\bar{y_{2.}} = 7$	$\bar{y_{3.}} = 10$	$\bar{y_{..}} = 7$

Le modèle de l'analyse de la variance à 2 facteurs sans interaction est comme suit : $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$ tel que :

y_{ij} : est la variable à expliquer (la texture fibreuse de la viande),
α_i : est l'effet du i^{eme} niveau du facteur B (caractère fibreux de la viande i),
β_j : est l'effet du j^{eme} niveau du facteur A (effet lié aux juges) μ : est l'effet moyen général (caractère fibreux potentiel),
ϵ_{ij} : est la variable aléatoire résiduelle (due à l'ensemble des autres causes qui déterminent la note fibreuse),

Pour faire l'ANOVA à deux facteurs, il faut appliquer la formule suivante :

$$\Sigma_i\Sigma_j(y_{ij} - \bar{y_{..}})^2 = \Sigma_j\Sigma_i(\bar{y_{i.}} - \bar{y_{..}})^2 + \Sigma_i\Sigma_j(\bar{y_{.j}} - \bar{y_{..}})^2 + \Sigma_i\Sigma_j(y_{ij} - \bar{y_{i.}} - \bar{y_{.j}} + \bar{y_{..}})$$

Soit : $SCT = SC_A + SC_B + SC_R$ tel que :
SC_A c'est la somme des carrés selon la variation du facteur A (l'effet du facteur A),
SC_B c'est la somme des carrés selon la variation du facteur B (l'effet du facteur B),
SC_R c'est la somme des carrés résiduelle,
i représente la variation de la viande (facteur B) et j représente la variation des juges (facteur A)

$SC_A = \Sigma_i\Sigma_j(\bar{y_{.j}} - \bar{y_{..}})^2 = (8,7-7)^2 + (8,7-7)^2 + (8,7-7)^2 + (8-7)^2 + (8-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (6-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (5,3-7)^2 + (5,3-7)^2 + (5,3-7)^2$ = 22,7.

$SC_B = \Sigma_j\Sigma_i(\bar{y_{i.}} - \bar{y_{..}})^2 = (4-7)^2 + (4-7)^2 + (4-7)^2 + (4-7)^2 + (4-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (7-7)^2 + (10-7)^2 + (10-7)^2 + (10-7)^2 + (10-7)^2 + (10-7)^2 = 45 + 45 = 90$.

$SC_R = \Sigma_i \Sigma_j (\bar{y_{ij}} - \bar{y_{i.}} - \bar{y_{.j}} + \bar{y_{..}}) = (3-4-8,7+7)^2 + (5-4-8+7)^2 + (6-4-6+7)^2 + (3-4-7+7)^2 + (3-4-5,3+7)^2 + (10-7-8,7+7)^2 + (8-7-8+7)^2 + (5-7-6+7)^2 + (7-7-7+7)^2 + (5-7-5,3+7)^2 + (13-10-8,7+7)^2 + (11-10-8+7)^2 + (7-10-6+7)^2 + (11-10-7+7)^2 + (8-10-5,3+7)^2 =$ 17,78 + 2,78 + 6,78 = 27,3.

$SCT = \Sigma_i \Sigma_j (\bar{y_{ij}} - \bar{y_{..}})^2 = (3-7)^2 + (5-7)^2 + (6-7)^2 + (3-7)^2 + (3-7)^2 + (10-7)^2 + (8-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2 + (5-7)^2 + (13-7)^2 + (11-7)^2 + (7-7)^2 + (11-7)^2 + (8-7)^2 =$ 140.

Si on suppose que le facteur A varie de "r" positions (c'est à dire les juges de 1 à 5) et que le facteur B varie de "s" positions (c'est à dire le caractère fibreux de la viande de 1 à 3), donc on a r = 5 et s = 3.
On peut avoir le tableau suivant :

Source de variation	SC	DDL
Effet principal de A	SC_A	r-1 = 5-1 = 4
Effet principal de B	SC_B	s-1 = 3-1 = 2
Effet résiduel	SC_R	$(r-1) \times (s-1) = 8$
Totale	SCT	$(r \times s) - 1 = 14$

Il y a aussi une autre méthode pour faire l'ANOVA à deux facteurs on utilisant une formule autre que :
$\Sigma_i \Sigma_j (y_{ij} - \bar{y_{..}})^2 = \Sigma_j \Sigma_i (\bar{y_{i.}} - \bar{y_{..}})^2 + \Sigma_i \Sigma_j (\bar{y_{.j}} - \bar{y_{..}})^2 + \Sigma_i \Sigma_j (y_{ij} - \bar{y_{i.}} - \bar{y_{.j}} + \bar{y_{..}})$
En réalité les deux formules sont identiques mais seulement la forme qui est différente, la deuxième formule est décrite comme suit :

Soit le tableau suivant :

Juge	A	B	C	Σ
1	3	10	13	26
2	5	8	11	24
3	6	5	7	18
4	3	7	11	21
5	3	5	8	16
Σ	20	35	50	T = 105

On calcule un paramètre $C = \frac{T^2}{r \times s} = \frac{105^2}{5 \times 3} = 735$.

SCT = $\Sigma_r \Sigma_s y_{ij}^2 - C$ = $(3^2+5^2+6^2+3^2+3^2+10^2+8^2+5^2+7^2+5^2+13^2+11^2+7^2+11^2+8^2) - 735$ = 875 - 735 = 140.
$\Rightarrow$ SCT = 140.

$SC_A = \Sigma_r \dfrac{T_i^2}{s} - C$ (sachant que i varie de 1 à r) = $(\dfrac{26^2}{3}+\dfrac{24^2}{3}+\dfrac{18^2}{3}+\dfrac{21^2}{3}+\dfrac{16^2}{3}) - 735$ = 757,7 - 735 = 22,7.
$\Rightarrow SC_A = 22,7$

$SC_B = \Sigma_s \dfrac{T_j^2}{r} - C$ (sachant que j varie de 1 à s) = $(\dfrac{20^2}{5}+\dfrac{35^2}{5}+\dfrac{50^2}{5}) - 735$ = 825 - 735 = 90.
$\Rightarrow SC_B = 90$

$SC_R = SCT - SC_A - SC_B = 140 - 22,7 - 90 = 27,3$
A partir de ces calculs, on peut calculer les paramètres :
$S_A^2 = \dfrac{SC_A}{(r-1)} = \dfrac{22,7}{(5-1)} = 5,7$
$S_B^2 = \dfrac{SC_B}{(s-1)} = \dfrac{90}{(3-1)} = 45$
$S_R^2 = \dfrac{SC_R}{(r-1)\times(s-1)} = \dfrac{27,3}{8} = 3,4$
$F_A = \dfrac{S_A^2}{S_R^2} = \dfrac{5,7}{3,4} = 1,67$
$F_B = \dfrac{S_B^2}{S_R^2} = \dfrac{45}{3,4} = 13,23$

Remarque : $S_A^2, S_B^2 et S_R^2$ sont respectivement CM_A, CM_B et CM_R (les carrés moyens). Les résultats vus précédemment sont présentés dans le tableau suivant :

Source de variation	SC	DDL	CM	F
Effet principal de A (des juges)	SC_A = 22,7	4	$CM_A = S_A^2 = 45$	1,67
Effet principal de B (type de viande)	SC_B = 90	2	$CM_B = S_B^2 = 5,7$	13,23
Effet résiduel	SC_R = 27,3	8	$CM_R = S_R^2 = 3,4$	
Totale	SCT = 140	14		

Si on fait un test d'hypothèse sur les résultats obtenus on conclu que :

Premier test, on a $F_{obs} = F_B = 13,2$. Si on prend α = 5 % (on prend la table de Fisher avec α = 5 %), on remarque que $F_{\alpha,2,8} = F_{5\%,2,8}$ = 4,5 et dans ce cas $F_{obs} >> F_{\alpha,2,8}$.
Conclusion : On rejette H_0 avec un risque de 5 % donc il existe un effet produit significatif concernant le caractère fibreux.

Deuxième test, on a $F_{obs} = F_A = 1,7$, avec α = 5 % $F_{\alpha,4,8}$ = 3,8. $F_{obs} < F_{\alpha,4,8}$ donc on accepte H_0 c'est à dire il n'existe pas un effet juge significatif.

La table de Fisher pour $\alpha = 5$ %

Table de la loi de Fisher-Snedecor, $\alpha = 5\%$

num	den 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4476	18.5128	10.1280	7.7086	6.6079	5.9874	5.5914	5.3177	5.1174	4.9646
2	199.5000	19.0000	9.5521	6.9443	5.7861	5.1433	4.7374	4.4590	4.2565	4.1028
3	215.7073	19.1643	9.2766	6.5914	5.4095	4.7571	4.3468	4.0662	3.8625	3.7083
4	224.5832	19.2468	9.1172	6.3882	5.1922	4.5337	4.1203	3.8379	3.6331	3.4780
5	230.1619	19.2964	9.0135	6.2561	5.0503	4.3874	3.9715	3.6875	3.4817	3.3258
6	233.9860	19.3295	8.9406	6.1631	4.9503	4.2839	3.8660	3.5806	3.3738	3.2172
7	236.7684	19.3532	8.8867	6.0942	4.8759	4.2067	3.7870	3.5005	3.2927	3.1355
8	238.8827	19.3710	8.8452	6.0410	4.8183	4.1468	3.7257	3.4381	3.2296	3.0717
9	240.5433	19.3848	8.8123	5.9988	4.7725	4.0990	3.6767	3.3881	3.1789	3.0204
10	241.8817	19.3959	8.7855	5.9644	4.7351	4.0600	3.6365	3.3472	3.1373	2.9782
11	242.9835	19.4050	8.7633	5.9358	4.7040	4.0274	3.6030	3.3130	3.1025	2.9430
12	243.9060	19.4125	8.7446	5.9117	4.6777	3.9999	3.5747	3.2839	3.0729	2.9130
13	244.6898	19.4189	8.7287	5.8911	4.6552	3.9764	3.5503	3.2590	3.0475	2.8872
14	245.3640	19.4244	8.7149	5.8733	4.6358	3.9559	3.5292	3.2374	3.0255	2.8647
15	245.9499	19.4291	8.7029	5.8578	4.6188	3.9381	3.5107	3.2184	3.0061	2.8450
16	246.4639	19.4333	8.6923	5.8441	4.6038	3.9223	3.4944	3.2016	2.9890	2.8276
17	246.9184	19.4370	8.6829	5.8320	4.5904	3.9083	3.4799	3.1867	2.9737	2.8120
18	247.3232	19.4402	8.6745	5.8211	4.5785	3.8957	3.4669	3.1733	2.9600	2.7980
19	247.6861	19.4431	8.6670	5.8114	4.5678	3.8844	3.4551	3.1613	2.9477	2.7854
20	248.0131	19.4458	8.6602	5.8025	4.5581	3.8742	3.4445	3.1503	2.9365	2.7740
21	248.3094	19.4481	8.6540	5.7945	4.5493	3.8649	3.4349	3.1404	2.9263	2.7636
22	248.5791	19.4503	8.6484	5.7872	4.5413	3.8564	3.4260	3.1313	2.9169	2.7541
23	248.8256	19.4523	8.6432	5.7805	4.5339	3.8486	3.4179	3.1229	2.9084	2.7453
24	249.0518	19.4541	8.6385	5.7744	4.5272	3.8415	3.4105	3.1152	2.9005	2.7372
25	249.2601	19.4558	8.6341	5.7687	4.5209	3.8348	3.4036	3.1081	2.8932	2.7298
26	249.4525	19.4573	8.6301	5.7635	4.5151	3.8287	3.3972	3.1015	2.8864	2.7229
27	249.6309	19.4587	8.6263	5.7586	4.5097	3.8230	3.3913	3.0954	2.8801	2.7164
28	249.7966	19.4600	8.6229	5.7541	4.5047	3.8177	3.3858	3.0897	2.8743	2.7104
29	249.9510	19.4613	8.6196	5.7498	4.5001	3.8128	3.3806	3.0844	2.8688	2.7048
30	250.0951	19.4624	8.6166	5.7459	4.4957	3.8082	3.3758	3.0794	2.8637	2.6996

FIGURE 1 – table de Fisher pour $\alpha = 5\%$

num	den 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4.8443	4.7472	4.6672	4.6001	4.5431	4.4940	4.4513	4.4139	4.3807	4.3512
2	3.9823	3.8853	3.8056	3.7389	3.6823	3.6337	3.5915	3.5546	3.5219	3.4928
3	3.5874	3.4903	3.4105	3.3439	3.2874	3.2389	3.1968	3.1599	3.1274	3.0984
4	3.3567	3.2592	3.1791	3.1122	3.0556	3.0069	2.9647	2.9277	2.8951	2.8661
5	3.2039	3.1059	3.0254	2.9582	2.9013	2.8524	2.8100	2.7729	2.7401	2.7109
6	3.0946	2.9961	2.9153	2.8477	2.7905	2.7413	2.6987	2.6613	2.6283	2.5990
7	3.0123	2.9134	2.8321	2.7642	2.7066	2.6572	2.6143	2.5767	2.5435	2.5140
8	2.9480	2.8486	2.7669	2.6987	2.6408	2.5911	2.5480	2.5102	2.4768	2.4471
9	2.8962	2.7964	2.7144	2.6458	2.5876	2.5377	2.4943	2.4563	2.4227	2.3928
10	2.8536	2.7534	2.6710	2.6022	2.5437	2.4935	2.4499	2.4117	2.3779	2.3479
11	2.8179	2.7173	2.6347	2.5655	2.5068	2.4564	2.4126	2.3742	2.3402	2.3100
12	2.7876	2.6866	2.6037	2.5342	2.4753	2.4247	2.3807	2.3421	2.3080	2.2776
13	2.7614	2.6602	2.5769	2.5073	2.4481	2.3973	2.3531	2.3143	2.2800	2.2495
14	2.7386	2.6371	2.5536	2.4837	2.4244	2.3733	2.3290	2.2900	2.2556	2.2250
15	2.7186	2.6169	2.5331	2.4630	2.4034	2.3522	2.3077	2.2686	2.2341	2.2033
16	2.7009	2.5989	2.5149	2.4446	2.3849	2.3335	2.2888	2.2496	2.2149	2.1840
17	2.6851	2.5828	2.4987	2.4282	2.3683	2.3167	2.2719	2.2325	2.1977	2.1667
18	2.6709	2.5684	2.4841	2.4134	2.3533	2.3016	2.2567	2.2172	2.1823	2.1511
19	2.6581	2.5554	2.4709	2.4000	2.3398	2.2880	2.2429	2.2033	2.1683	2.1370
20	2.6464	2.5436	2.4589	2.3879	2.3275	2.2756	2.2304	2.1906	2.1555	2.1242
21	2.6358	2.5328	2.4479	2.3768	2.3163	2.2642	2.2189	2.1791	2.1438	2.1124
22	2.6261	2.5229	2.4379	2.3667	2.3060	2.2538	2.2084	2.1685	2.1331	2.1016
23	2.6172	2.5139	2.4287	2.3573	2.2966	2.2443	2.1987	2.1587	2.1233	2.0917
24	2.6090	2.5055	2.4202	2.3487	2.2878	2.2354	2.1898	2.1497	2.1141	2.0825
25	2.6014	2.4977	2.4123	2.3407	2.2797	2.2272	2.1815	2.1413	2.1057	2.0739
26	2.5943	2.4905	2.4050	2.3333	2.2722	2.2196	2.1738	2.1335	2.0978	2.0660
27	2.5877	2.4838	2.3982	2.3264	2.2652	2.2125	2.1666	2.1262	2.0905	2.0586
28	2.5816	2.4776	2.3918	2.3199	2.2587	2.2059	2.1599	2.1195	2.0836	2.0517
29	2.5759	2.4718	2.3859	2.3139	2.2525	2.1997	2.1536	2.1131	2.0772	2.0452
30	2.5705	2.4663	2.3803	2.3082	2.2468	2.1938	2.1477	2.1071	2.0712	2.0391

FIGURE 2 – Suite table de Fisher pour $\alpha = 5\%$