

Ex1 : Déterminer la transformée en z de la suite échelon unité déterminée par :
 $u(n) = 1$ pour tout $n > 0$.

Réponse:

On a :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

Or on sait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

On en déduit donc que :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Ex2 : Déterminer la transformée en z de la suite exponentielle déterminée par :
 $x(n) = a^n \cdot u(n)$

Réponse :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Ce qui conduit à :

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Ex3 :

La transformée en z de $x(n) = a^n \cdot u(n)$:

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

converge pour $|az^{-1}| < 1$, soit $|z| > |a|$. Son domaine de convergence est donc $|z| > |a|$.

Ex4 : Calculer la transformée en z du produit de convolution des séquences suivantes :

$x(n) = 2a^n u(n)$ et $y(n) = d(n-1)$

Il suffit de déterminer les transformées en z de $x(n)$ et de $y(n)$ puis de les multiplier entre elles :

$$X(z) = \frac{2}{1-az^{-1}}$$

$$Y(z) = z^{-1}$$

$$X(z) \cdot Y(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

Ex5 : Déterminer la transformée inverse de :

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Réponse:

La première étape consiste à factoriser le dénominateur :

La décomposition en éléments simples donne :

$$X(z) = \frac{A}{(1 - z^{-1})} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

On trouve A = 2 et B = -1 :

$$X(z) = \frac{2}{(1 - z^{-1})} + \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

La table permet d'obtenir :

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = 2u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$