Series of Exercises 01

Mathematical Logic and Proofs

Exercise 1 Which of the following expressions are propositions? In the case of a proposition, say whether it is true or false :

1. $\sqrt{2}$ is an irrational number.
2. 136 is a multiple of 17 and 2 divides 167.
3. 136 is a multiple of 17 or 2 divides 167.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = 5$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n + 3 = 7$
6. The integer n divides 12.

Exercise 2 Let P, Q and R be propositions. Give the truth table of these propositions.

1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
2. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $\overline{P \wedge (Q \wedge R)} \Leftrightarrow Q$

Exercise 3 Let f and g two functions of $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, write in terms of quantifiers the following expressions :

1. f never equals zero.
2. f is even.
3. f is strictly increasing function.
4. f is bounded.
5. f is less than g .

Exercise 4 Show which of the following propositions are true and which are false, then give their negation :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \text{ and } x + 2 = 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0) \text{ and } (\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

Exercise 5 1. Using the proof by contradiction prove that :

- $\sqrt{2}$ is not a rational number.
 - Let $n > 0$, if n is the square of an integer then $2n$ is not the square of an integer.
2. Prove by induction :
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 - $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
 3. By contrapositive, Prove that :
 - $(n^2 - 1) \text{ is not divisible by } 8 \Rightarrow n \text{ is even.}$

Série de TD 01 Notions de Logique

Exercice 6 Parmi les expressions suivantes lesquelles sont des propositions ? Dans le cas d'une proposition dire si elle est vraie ou fausse :

1. $\sqrt{2}$ est nombre irrationnel.
2. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
3. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = 5$
5. $\exists n \in \mathbb{N}, n + 3 = 7$
6. L'entier a divise 12.

Exercice 7 Soient P, Q et R des propositions. Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?

1. $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow Q)$
2. $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. $P \wedge (\overline{Q \wedge R}) \Leftrightarrow Q$

Exercice 8 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f ne s'annule jamais
2. f est paire
3. f est strictement croissante
4. f est majorée.
5. f est inférieure à g

Exercice 9 Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses. Puis donner leur négation

1. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \text{ et } x + 2 = 0)$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

Exercice 10 1. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que :

- $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel
 - Soit $n > 0$, si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.
2. Monter par récurrence :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 - $\forall x \in \mathbb{R}^{**}, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. Par contraposée, montrer que :
- $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair.