

Analyse d'un filtre numérique

Donner l'équation aux différences du filtre représenté sur la figure 2. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

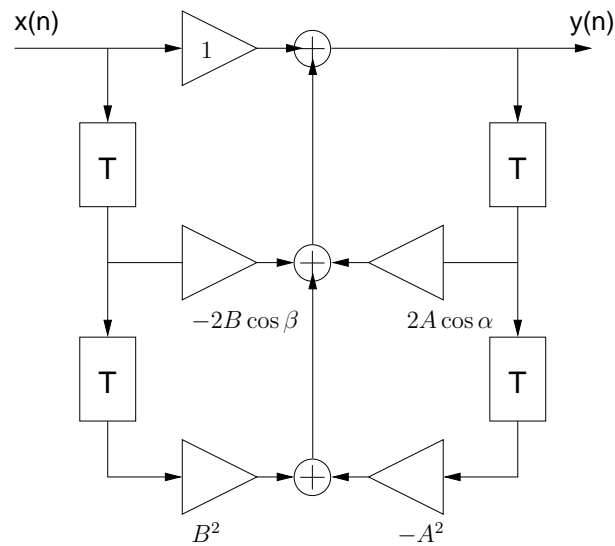


FIGURE 2 –

- b) Calculez la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.
- c) Quels sont les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessinez le diagramme pôles-zéros dans le cas où $A = B = 0.9$, $\alpha = \pi/3$ et $\beta = 2\pi/3$.
- d) Esquissez le module de la réponse fréquentielle dans ce cas.

Exercice 2

On considère un filtre de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} \quad (1.6)$$

où a et b sont deux réels $\in]0, 1[$ tels que $b > a$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

1. Quel est l'ordre du filtre défini par la fonction de transfert $H(z)$?
2. Déterminer l'équation récurrente définissant le filtre dans le domaine temporel.
3. Quel type de filtre rationnel (RIF, RII) est défini par $H(z)$? Justifiez votre réponse.
4. Le filtre défini par $H(z)$ est-il stable ? Justifiez votre réponse.

Correction

1. Le filtre défini par la fonction de transfert $H(z)$ est d'ordre 2 (degré du dénominateur).
- 2.

$$Y(z) (1 - (a + b)z^{-1} + abz^{-2}) = X(z)$$

$$\xrightarrow{TZ^{-1}} y(n) = x(n) + (a + b)y(n - 1) - aby(n - 2)$$

3. Ce filtre est de type RII car il présente une boucle de réaction : la sortie à l'instant n dépend de l'entrée à l'instant n mais également des valeurs passées de la sortie.
4. Ce filtre sera stable si les pôles de $H(z)$ sont inclus dans le cercle de rayon 1. Pour cela il faut que $|a| < 1$ et $|b| < 1$, ce qui est le cas ici. Le filtre est donc stable.

Exercice 3

Soit le filtre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ défini par l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = x(n) - ay(n - 1) \quad (1.7)$$

1. Déterminer sa fonction de transfert $H(z)$.
2. Déterminer la transformée en z de $\delta(n)$ et de $\delta(n - 1)$. En déduire la réponse impulsionnelle du filtre.
3. Déterminer la transformée en z de la fonction échelon unité $u(n)$, ainsi que son domaine d'existence. En déduire la réponse indicielle du filtre.
4. Le filtre défini par l'équation 1.7 est-il un filtre RIF ou un filtre RII ? Justifiez votre réponse.
5. Le filtre défini par l'équation 1.7 est-il stable ? Justifiez votre réponse.
6. Le filtre défini par l'équation 1.7 est-il causal ? Justifiez votre réponse.

Correction

1.

$$Y(z) = X(z) - az^{-1}X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - az^{-1}$$

2.

$$\delta(n) \rightarrow \Delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = \delta(0)z^0 = 1$$

$$TZ[\delta(n-1)] = z^{-1}TZ[\delta(n)] = z^{-1}$$

D'où :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - az^{-1} \rightarrow h(n) = TZ^{-1}[H(z)] = \delta(n) - a\delta(n-1)$$