

## Chapitre 1 : Rappels sur les filtres numériques (RIF et RII)

### 1.1 Transformée en Z

#### 1- Définitions :

En traitement du signal il arrive souvent de ne devoir considérer que certaines valeurs d'un signal temporel, par exemple à  $nT$ ,  $n = 0; 1; 2 \dots$ , où  $T$  est un nombre positif fixé, appelé période d'échantillonnage.

Autrement dit, en partant d'un signal continu  $f(t)$ , on considère un signal discret représenté par  $(f(nT))$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . La transformée en Z permet d'associer une fonction d'une variable complexe à ce type de signal discret, et d'employer certaines techniques de l'analyse complexe pour étudier des propriétés du signal. La transformée en Z est également employée en filtrage numérique ainsi que pour la résolution d'équations récurrentes.

Alors la transformée en  $z$  d'une séquence  $x(n)$  est définie comme la série  $X(z)$  calculée comme suit :  $X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$  où  $z \in \mathbb{C}$  est une variable complexe et  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle encore cette équation la transformée directe, car c'est la relation qui permet d'obtenir  $X(z)$  à partir de  $x(n)$ .

Cette transformée est aussi qualifiée de bilatérale par opposition à unilatérale. La transformée en  $z$  unilatérale pour une séquence causale est définie par  $X_u(z)$  calculée comme suit :

$$X_u(z) = \sum_0^{\infty} x(n)z^{-n}$$

L'opération inverse porte le nom de transformation inverse. Ainsi l'analyse d'un système discret se fera en général au moyen de la transformée en Z.

On note que  $z$  étant une variable complexe et la fonction  $X(z)$  possède un domaine de convergence (en  $z$ ) ou région de convergence (RdC) qui est en général un anneau centré sur l'origine et compris entre deux rayons  $R_1$  et  $R_2$ , où  $R_1 < |z| < R_2$

La transformée en  $z$  doit toujours indiquer sa région de convergence, puisque c'est une série de puissance infinie.

– RdC ne contient pas de pôle de  $X(z)$ . Elle correspond, en général, pour les signaux causaux à l'extérieur d'un cercle  $|z| > a$

– Pour les signaux physiques (qui ont une durée d'existence finie) :

RdC = ensemble du plan complexe avec l'exclusion possible de  $z=0$  ou  $z=\infty$

Exemple : Déterminer les transformée en  $z$  des séquences finies suivantes :

$X_1(n) = \{ 1, 2, 5, 7, 0, 1 \}$ ,  $x_2(n) = \{ 1, 2, 5, 7, 0, 1 \}$  où pour  $x_2$  la valeur 5 signifie  $x_2(0) = 5$

Alors :  $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$  R.O.C : tout le plan Z sauf  $z = 0$

$X_2(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$  R.O.C : tout le plan Z sauf  $z = 0$  et  $z = \infty$

#### 2- Propriétés de la transformée en Z :

##### a- Linéarité :

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres complexes et  $x$  et  $y$  deux suites de nombres complexes.

Alors :  $Z(\alpha x + \beta y) = \alpha Z(x) + \beta Z(y)$

##### b- Signal retardé

Soient  $x$  une suite numérique,  $k \in \mathbb{N}$  et  $y$  la suite de terme général

Soit  $y(t - n.T_e)$  nulle pour  $t < n.T_e$ ,  $Z[y(t - n.T_e)] = z^{-n} . Z[y(t)]$

On retiendra qu'un retard de  $T_e$  se traduit par une multiplication par  $z^{-1}$ .

##### c- Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$Y(0) = \lim_{n \rightarrow 0} y(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) \quad \text{et} \quad y(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}).Y(z)$$

d- Produit de convolution

La transformée en z du produit de convolution de deux signaux discrets  $g(n)$  et  $u(n)$  est égale au produit des transformées en z de chacun des signaux.

$$Z \{g(n) * u(n)\} = Z \left( \sum_{k=0}^n g(n-k)u(k) \right) = G(z) \cdot U(z)$$

Ex : Calculer la transformée en z du produit de convolution des séquences suivantes :

$$\begin{aligned} x(n) &= 2a^n u(n) \text{ et } y(n) = \delta(n-1) \\ X(z) &= 2 / (1-az^{-1}) \quad Y(z) = z^{-1} \\ X(z) \cdot Y(z) &= 2z^{-1} / (1-az^{-1}) \end{aligned}$$

**2-Exemples de transformées :**

2.1. Suite de Dirac :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Comme on a,  $x(n) = 1$  à  $n = 0$ , on en déduit que :

$$X(z) = 1 \cdot z^{-0} \text{ alors } X(z) = 1$$

2.2. Suite échelon unité

La transformée en z de la suite échelon unité déterminée par :

$u(n) = 1$  pour tout  $n > 0$ .

On a :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

Or on sait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

On en déduit donc que :

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Table de transformées en z :

| DISCRETE SIGNAL            | Z - TRANSFORM  |
|----------------------------|--|
| 1. $x(n)$                  | $X(z)$   |
| 2. $\delta(n)$             | 1  |
| 3. $a^n u(n)$              | $\frac{1}{1-az^{-1}}$  |
| 4. $a^n \cos n\theta u(n)$ | $\frac{1-az^{-1}\cos\theta}{1-2az^{-1}\cos\theta + a^2z^{-2}}$ |
| 5. $a^n \sin n\theta u(n)$ | $\frac{az^{-1}\sin\theta}{1-2az^{-1}\cos\theta + a^2z^{-2}}$   |

|                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| 6. $na^n u(n)$             | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$    |
| 7. $n(n-1)a^n u(n)$        | $\frac{2a^2z^{-2}}{(1-az^{-1})^3}$ |
| 8. $a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ | $a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$            |
| 9. $x(n-m)$                | $z^{-m}X(z)$                       |
| 10. $x_1(n) * x_2(n)$      | $X_1(z)X_2(z)$                     |
| 11. $a^n x(n)$             | $X(a^{-1}z)$                       |
| 12. $nx(n)$                | $\frac{z^{-1}dX(z)}{dz^{-1}}$      |

## 1.2 Les filtres numériques

### 1.2.1 Classification des filtres numériques

Un filtre numérique peut être classé selon sa réponse :

Filtres numériques\_réponse impulsionnelle finie : la durée de sa réponse impulsionnelle est finie : les filtres RIF ont leur réponse impulsionnelle à support fini

i.e.  $h(n) = 0$  pour  $n < 0$  et  $n > N$

Filtres numériques\_réponse impulsionnelle Infinie : les filtres RII ont leur réponse impulsionnelle à support infini

i.e.  $h(n) \neq 0$  pour toute  $n$

– le type de représentation temporelle

récurifs : la sortie  $y(n)$  dépend de l'entrée courante, des entrées précédentes et des sorties précédentes

non récurifs : la sortie  $y(n)$  ne dépend que de l'entrée courante et des entrées précédentes.

### Réponse impulsionnelle

On sait, en analogique, que la réponse impulsionnelle d'un filtre le définit complètement. Il en est de même pour les filtres numériques.

Notons toutefois une différence importante : l'impulsion analogique  $\delta(t)$  n'est pas réalisable physiquement, alors que la suite numérique impulsionnelle  $\delta(n)$  est facilement réalisable :

$$\delta(n) = 1 \text{ si } n = 0$$

$$\delta(n) = 0 \text{ si } n \neq 0$$

On désignera par  $h(n)$  la réponse impulsionnelle du filtre.

### 1.2.2 Représentation d'un filtre numérique

Un filtre numérique est un algorithme de calcul qui fait correspondre à une suite d'échantillons différences  $Y(n)$  s'écrit :

$$Y(n) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x(n-k) - \sum_{k=1}^M a_k \cdot y(n-k)$$

Appelée équation aux différences linéaire à coefficients constants d'ordre  $N$ .

En utilisant la transformée en Z :

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k} \cdot X(z) - \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k} \cdot Y(z)$$

$$\text{Alors } H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k} / (1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k})$$

Si  $a_k = 0$ , le filtre s'appelle non récursif ou RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) ;

Si  $a_k \neq 0$ , le filtre s'appelle récursif ou RII (Réponse Impulsionnelle Infnie) ;

Si les pôles de  $H(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité, le filtre est stable ;

Si la réponse impulsionnelle est causale  $h(n) = 0$ ; pour tout  $n < 0$ , le filtre est causal.

### Représentation par pôles et zéros

La fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_M z^{-M}}$$

Les pôles de  $H(z)$  sont les valeurs de  $z$  pour lesquelles  $H(z)$  tend vers l'infini.

Les zéros de  $H(z)$  sont les valeurs de  $z$  pour lesquelles  $H(z)$  est nulle.

Les zéros et les pôles complexes de  $H(z)$  sont du type  $a \pm jb$ .

#### 1.2.3 Filtre à réponse impulsionnelle finie RIF

Les filtres RIF constituent une classe importante des filtres numériques car, ils sont caractérisés par une phase linéaire dans la bande passante. Ils sont définis par l'équation

$$Y(n) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x(n-k)$$

L'ordre du filtre numérique est donné par le degré de la récursivité de l'équation aux différences finies associée :  $N$ .

La fonction de transfert en  $z$  est donnée par :

$$H(z) = \sum_{K=0}^N b_k \cdot z^{-k}$$

#### 1.2.4 Propriétés des filtres RIF

-Les RIF sont toujours stables (système tout zéros).

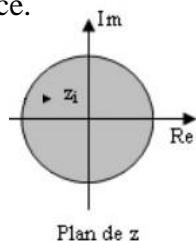
- Une plus grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement.

- Une phase qui peut être exactement linéaire, par conséquent un temps de propagation de groupe constant et une absence de distorsion harmonique dans le signal.

- A sélectivité équivalente, ils sont toujours plus coûteux (en temps de calcul) que leur équivalent RII.

-Stabilité du filtre

Pour qu'un filtre numérique soit stable, il faut que ses pôles soient à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. Autrement dit, il faut que le cercle unité appartienne à la région de convergence.





$$H(z) = \alpha \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_M)}$$

Où:  $z_1, z_2, \dots, z_N$  sont les zéros,  $p_1, p_2, \dots, p_M$  sont les pôles ou les valeurs qui annulent le dénominateur.

Rque : Les filtres à réponse impulsionnelle finie sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles.

### 1.2.5 Réalisation des filtres RIF et RII :

Les filtres numériques peuvent être réalisés à l'aide de trois éléments ou opérations de base, soit l'élément gain, l'élément de sommation et le retard unitaire ; ces éléments sont suffisants pour réaliser tous les filtres numériques linéaires possibles. La réalisation présentée dans la figure ci-dessous est une réalisation directe de type filtre RII.

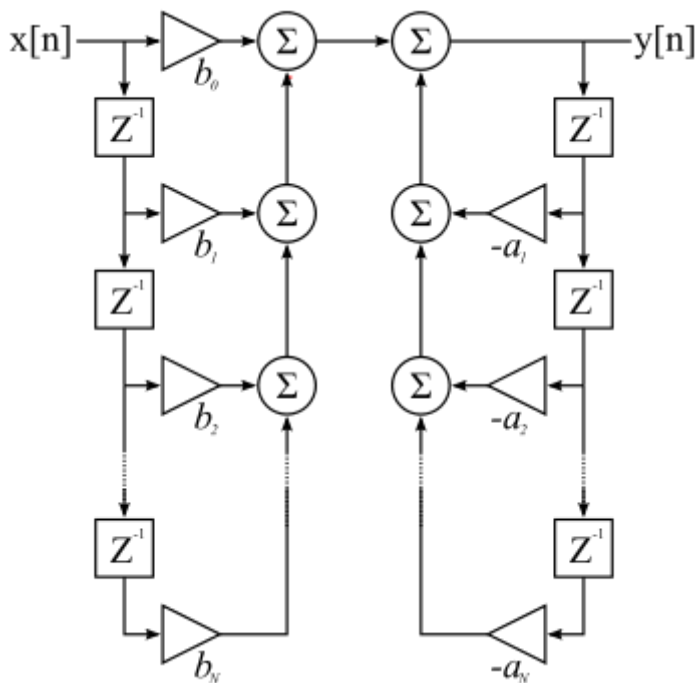


Figure 1.1. Réalisation directe de type filtre à réponse impulsionnelle infinie RII.

### 1.2.6 Analyse des filtres numériques :

Un filtre numérique linéaire peut être décrit par :

- une équation aux différences
- un produit de convolution
- sa fonction de transfert
- sa stabilité
- sa réponse impulsionnelle ou indicielle
- sa réponse fréquentielle et la nature du filtre
- son diagramme des pôles et des zéros

L'outil mathématique exploité pour faciliter son analyse est la transformée en Z.

Exemple :

Ex1. Soit le filtre numérique d'écrit par:

$$y(k) = 0.6x(k) + 0.1x(k-1) + 0.6x(k-2) + 1.2y(k-1) - 0.4y(k-2)$$

- (a) Déterminer la fonction de transfert  $H(z)$ .  
 (b) Préciser le type de filtre : RIF ou IIR. Justifier.

Ex 2. Soit le filtre numérique d'écrit par:

$$H(z) = 1 + 5z^{-1} - 3z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4z^{-5}$$

- (a) D'écrit l'équation aux différences du filtre.  
 (b) Déterminer la réponse impulsionnelle.  
 (c) Préciser le type de filtre : RIF ou IIR. Justifier.

Solutions Exos filtres numériques :

Ex1 :  $y(k) = 0.6x(k) + 0.1x(k-1) + 0.6x(k-2) + 1.2y(k-1) - 0.4y(k-2)$   
 Transformée en Z de l'équation :

$$Y(z) = 0.6X(z) + 0.1z^{-1}X(z) + 0.6z^{-2}X(z) + 1.2z^{-1}Y(z) - 0.4z^{-2}Y(z)$$

$$Y(z) [1 - 1.2z^{-1} + 0.4z^{-2}] = X(z) [0.6 + 0.1z^{-1} + 0.6z^{-2}]$$

La fonction de transfert est :

$$H(z) = Y(z)/X(z) = (0.6 + 0.1z^{-1} + 0.6z^{-2}) / (1 - 1.2z^{-1} + 0.4z^{-2})$$

C'est un filtre à réponse impulsionnelle infinie : RII car  $H(z)$  possède des pôles.

Ex2:  $H(z) = 1 + 5z^{-1} - 3z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4z^{-5}$

a- L'équation aux différences du filtre :

$$H(z) = Y(z)/X(z) = 1 + 5z^{-1} - 3z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4z^{-5}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot [1 + 5z^{-1} - 3z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4z^{-5}]$$

$$Y(k) = x(k) + 5x(k-1) - 3x(k-2) + 2.5x(k-3) + 4x(k-5)$$

b- La réponse impulsionnelle :

$$h(k) = \delta(k) + 5\delta(k-1) - 3\delta(k-2) + 2.5\delta(k-3) + 4\delta(k-5)$$

avec  $\delta(k) = 1$  pour  $k=0$  et  $\delta(k)=0$  pour  $k \neq 0$

c- Type de filtre : filtre RIF car il ne présente pas de boucle de retour dans sa structure ou pas de pôles.

## 2- Synthèse des filtres numériques :

### 2.1 -Méthodes générales de synthèse des filtres numériques.

Les méthodes de synthèse les plus utilisées s'appuient sur les propriétés (bien connues !...) des filtres analogiques.

On part d'un filtre analogique « prototype » de fonction de transfert  $G_{\text{anl}}(p)$  ayant les propriétés souhaitées, puis on cherche le filtre numérique de fonction de transfert  $H_{\text{Nu}}(z)$  ayant sensiblement les mêmes propriétés :

- même réponse impulsionnelle
- même réponse indicielle
- même réponse harmonique sur l'intervalle  $(f_c/2 ; f_c/2) \dots$  th de Shannon

#### 2.1.1 Synthèse de filtres R.I.F.

Le calcul des coefficients des filtres FIR repose sur l'utilisation de la **transformée de Fourier numérique** et des **fenêtres spectrales** (rectangulaire, Hamming, Hanning, ...).

Une suite d'échantillon  $h(n)$  séparés de  $T_e=1/F_e$  admet pour transformée de Fourier numérique  $H(j\omega)$  :

Un filtre RIF est définie par une fonction de transfert :

$$H(z) = \sum_{k=0}^P a_k \cdot z^{-k}$$

soit en régime harmonique :

$$H(j\omega) = \sum_{k=0}^P a_k \cdot (e^{j\omega T_e})^{-k} = \sum_{k=0}^P a_k \cdot e^{-k \cdot j\omega T_e}$$

Il arrive souvent que ces coefficients aient des propriétés de symétrie :

$$a_k = a_{P-k} \quad \text{ou} \quad a_k = -a_{P-k}$$

Si on regroupe deux à deux les termes :

$$\begin{aligned} a_k \cdot e^{-k \cdot j\omega T_e} + a_{P-k} \cdot e^{-(P-k) \cdot j\omega T_e} &= a_k \cdot [e^{-k \cdot j\omega T_e} + e^{-(P-k) \cdot j\omega T_e}] \\ &= a_k \cdot e^{-j \frac{P}{2} \omega T_e} \cdot \left[ e^{\left(\frac{P}{2}-k\right) \cdot j\omega T_e} + e^{-\left(\frac{P}{2}-k\right) \cdot j\omega T_e} \right] \\ &= \underbrace{2 \cdot a_k \cdot \cos \left[ \left(\frac{P}{2}-k\right) \cdot \omega T_e \right]}_{\in \mathbb{R}} \cdot e^{-j \frac{P}{2} \omega T_e} \end{aligned}$$

$$\text{(si } a_k = -a_{P-k}, \text{ on obtient } 2 \cdot j \cdot a_k \cdot \sin \left[ \left(\frac{P}{2}-k\right) \cdot \omega T_e \right] \cdot e^{-j \frac{P}{2} \omega T_e} \text{)}$$

On aura alors :

$$H(j\omega) = e^{-j \frac{P}{2} \omega T_e} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{P}{2}} 2 \cdot a_k \cdot \cos \left[ \left(\frac{P}{2}-k\right) \cdot \omega T_e \right]}_S$$

D'où :

$$\text{Arg}[H(j\omega)] = -\frac{P}{2} \cdot T_e \cdot \omega \quad (+ \pi) \quad (\text{le terme } + \pi \text{ intervient si } S < 0)$$

## -2- Méthodes de synthèse

On cherche à réaliser un filtre de fonction de transfert :

$$H_{\text{Num}}(z) = \sum_{k=0}^P a_k \cdot z^{-k}$$

ou, ce qui est équivalent, défini par la récurrence :

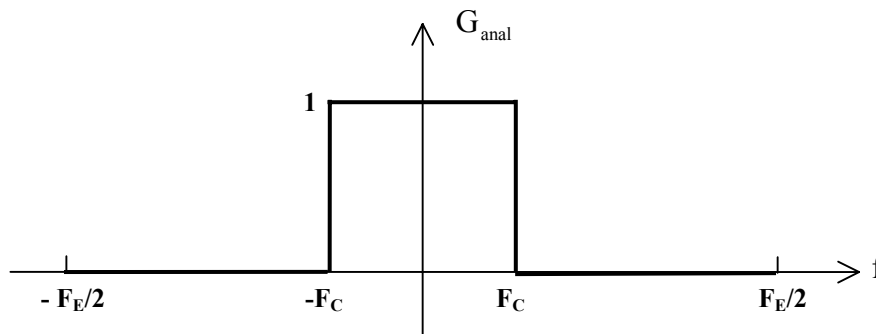
$$y(n) = \sum_{k=0}^P a_k \cdot x(n-k)$$

Or, on a vu que pour un filtre RIF :  $a_k = h(k)$ , où  $h(n)$  est la réponse impulsionnelle du filtre. Le problème se ramène donc à la détermination de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  du filtre numérique.

Deux cas peuvent se présenter :

- on sait calculer la réponse impulsionnelle  $g(t)$  du filtre analogique prototype (technique de l'échantillonnage temporel)
- on ne sait pas calculer  $g(t)$ , mais on connaît l'allure de la réponse en fréquence du filtre analogique prototype.  $G_{\text{anal}}(j\omega)$  est connu, ou au moins un gabarit (technique de l'échantillonnage en fréquence).

On travaillera sur un exemple pour mettre en œuvre ces deux techniques : on cherche à réaliser sous forme numérique un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $F_C = \frac{F_E}{10}$



### -a) Echantillonnage temporel (invariance impulsionnelle)

Soit  $g(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre analogique :

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} \Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot dt = 1 \\ &\xrightarrow{\text{Filtrage}} G(f) = G_{\text{anal}}(f) \cdot \Delta(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -F_C < f < F_C \\ 0 & \text{si } f \notin [-F_C ; F_C] \end{cases} \\ &\xrightarrow{\text{Fourier Inverse}} g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df \\ &= \int_{-F_C}^{+F_C} e^{j2\pi \cdot f \cdot t} \cdot df \\ &= \frac{e^{j2\pi \cdot F_C \cdot t} - e^{-j2\pi \cdot F_C \cdot t}}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot t} \\ &= 2 \cdot F_C \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot F_C \cdot t)}{2\pi \cdot F_C \cdot t} \end{aligned}$$

Cette réponse impulsionnelle est échantillonnée pour fournir la réponse impulsionnelle du filtre numérique :

$$h(n) = T_E \cdot g(n \cdot T_E) = 2 \cdot F_C \cdot T_E \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot F_C \cdot n \cdot T_E)}{2 \cdot \pi \cdot F_C \cdot n \cdot T_E}$$

Pour  $F_C = \frac{F_E}{10}$ , on obtient numériquement :

$$h(n) = 0,2 \cdot \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{5}\right)}{n \cdot \frac{\pi}{5}}$$

Deux problèmes surgissent :

1. la réponse impulsionnelle est infinie. Pour la rendre finie, on tronque cette réponse (fenêtre rectangulaire) ; voir TP : on ne prend que 17 échantillons, de  $n = -8$  à  $n = +8$ .
2. le filtre n'est pas causal : il répond **avant** l'impulsion. Il n'est donc pas réalisable physiquement. Pour le rendre causal (et donc réalisable), on translate cette réponse de 8 échantillons :  $h(-8)$  devient  $h(0)$ ,  $h(-7)$  devient  $h(1)$  ...  $h(8)$  devient  $h(16)$ .

L'ensemble des opérations de synthèse est résumé page suivante.

Valeurs des coefficients :

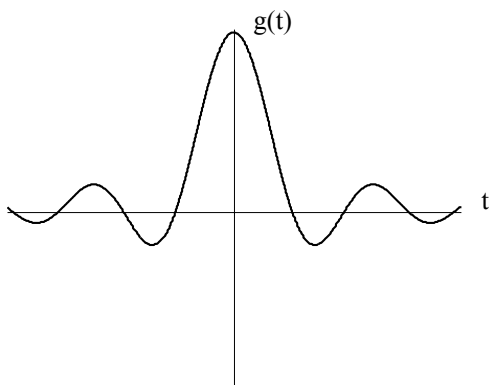
|                |           |           |           |          |          |           |           |           |     |
|----------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| k              | 0         | 1         | 2         | 3        | 4        | 5         | 6         | 7         | 8   |
| a <sub>k</sub> | -0.037841 | -0.043247 | -0.031183 | 0        | 0.046774 | 0.10091   | 0.15137   | 0.1871    | 0.2 |
| k              | 9         | 10        | 11        | 12       | 13       | 14        | 15        | 16        |     |
| a <sub>k</sub> | 0.1871    | 0.15137   | 0.10091   | 0.046774 | 0        | -0.031183 | -0.043247 | -0.037841 |     |

Dans le tableau on remarque qu'on retrouve la propriété  $h(k) = h(16 - k)$  et l'argument varie de façon linéaire traduisant un retard de 8.

**Synthèse d'un filtre passe-bas « idéal » avec une fréquence ( $F_C = F_E/10$ ) :**

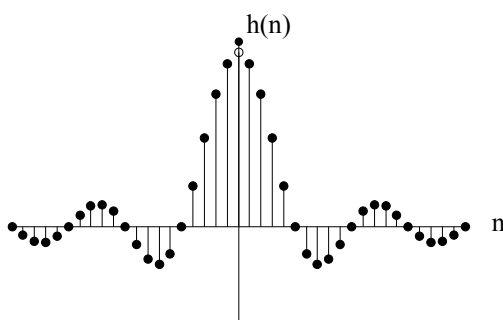
**C'est l'échantillonnage temporel:**

Filtre analogique de réponse impulsionnelle  $g(t)$  avec  $g(t) = 2 \cdot F_C \cdot \frac{\sin(2\pi \cdot F_C \cdot t)}{2\pi \cdot F_C \cdot t}$

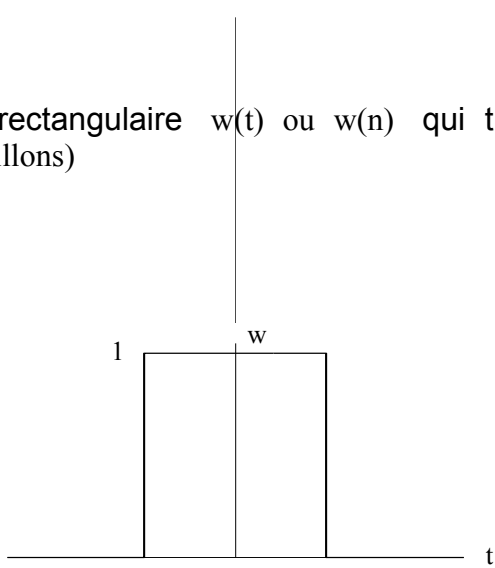


Echantillonnage de la réponse impulsionnelle avec un pas  $T_E$  donne la courbe :

$$h(n) = T_E \cdot g(n \cdot T_E)$$

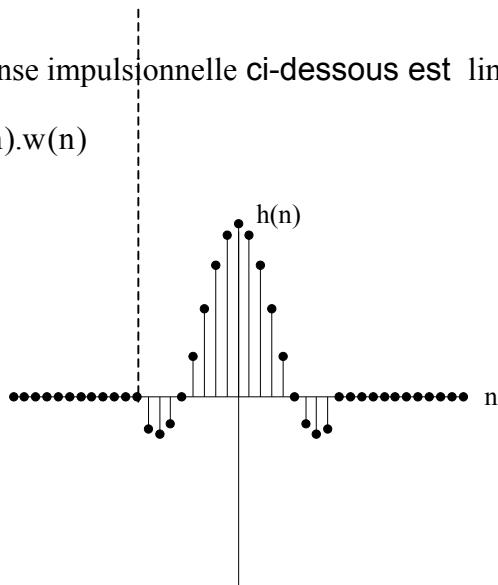


Fenêtre rectangulaire  $w(t)$  ou  $w(n)$  qui tronque la réponse impulsionnelle. (limitation du nombre d'échantillons)

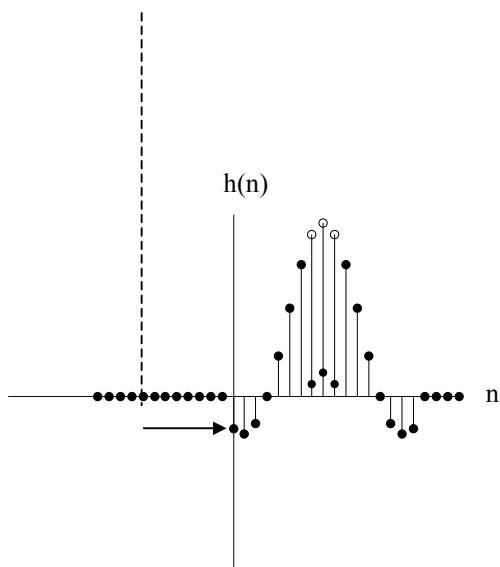


Réponse impulsionnelle ci-dessous est limitée à un nombre fini d'échantillons par la multiplication de:

$h(n).w(n)$



Décalage de la réponse impulsionnelle vers la droite pour rendre le filtre causal : (filtre causal, c'est à dire qu'il est réalisable physiquement)



## -b) Echantillonnage en fréquence

on a la réponse en fréquence du filtre analogique prototype.

On décide d'échantillonner en fréquence  $G_{\text{anal}}(j,\omega)$ . On définit donc la suite :

$$H(k) = G_{\text{anal}}\left(jk \cdot \frac{\omega_E}{N}\right)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons. En reprenant le même exemple que précédemment  $N = 17$ ,  $H(0) = H(-1) = H(1) = 1$  et  $H(2) = H(-2) = \dots = H(8) = H(-8) = 0$

On peut en déduire, par transformation de Fourier discrète (TFD), les valeurs de la réponse impulsionnelle :

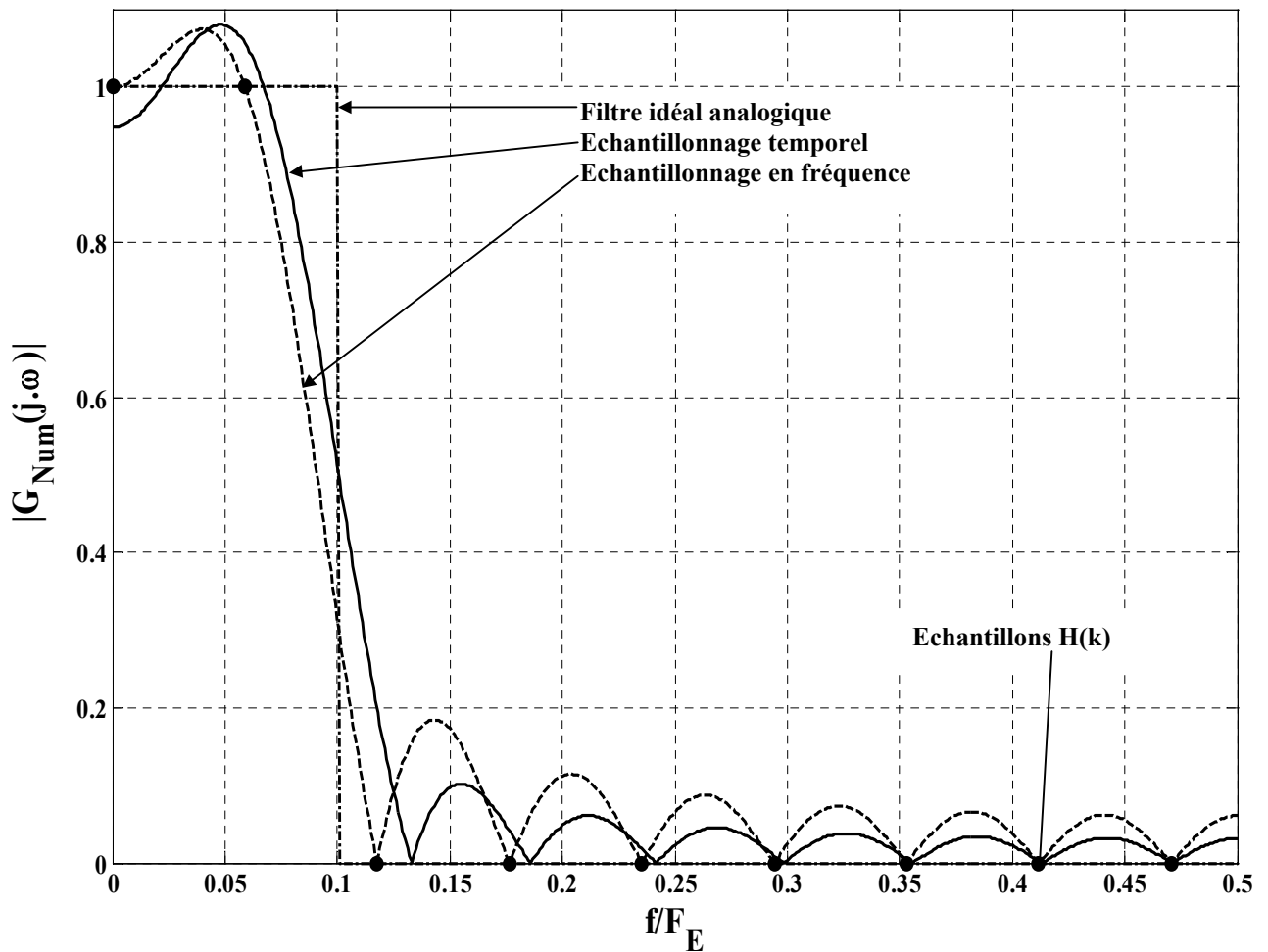
$$h(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-N/2}^{N/2} H(k) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

Dans notre cas :

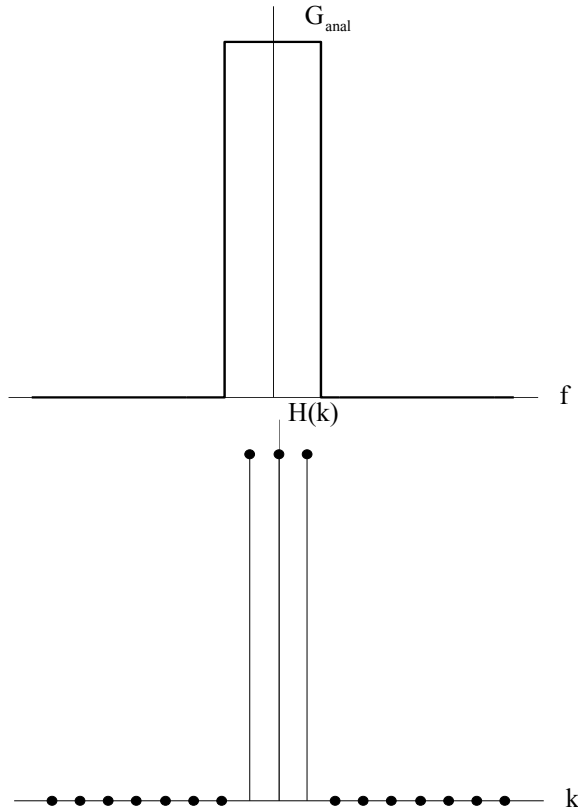
$$h(n) = \frac{1}{17} \cdot \left( 1 + e^{-j \frac{2\pi}{17} \cdot n} + e^{j \frac{2\pi}{17} \cdot n} \right) = \frac{1}{17} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{17} \cdot n\right) \right] \quad \text{avec } -8 \leq n \leq 8$$

Enfin, pour rendre ce filtre réalisable physiquement, on translate cette réponse impulsionnelle de 8 échantillons. L'ensemble de ces opérations est résumé page suivante.

La figure ci-dessous indique la réponse en fréquence de chaque filtre.



exemple de Synthèse d'un filtre passe-bas « idéal » ( $F_C = F_E/10$ ) : un échantillonnage en fréquence

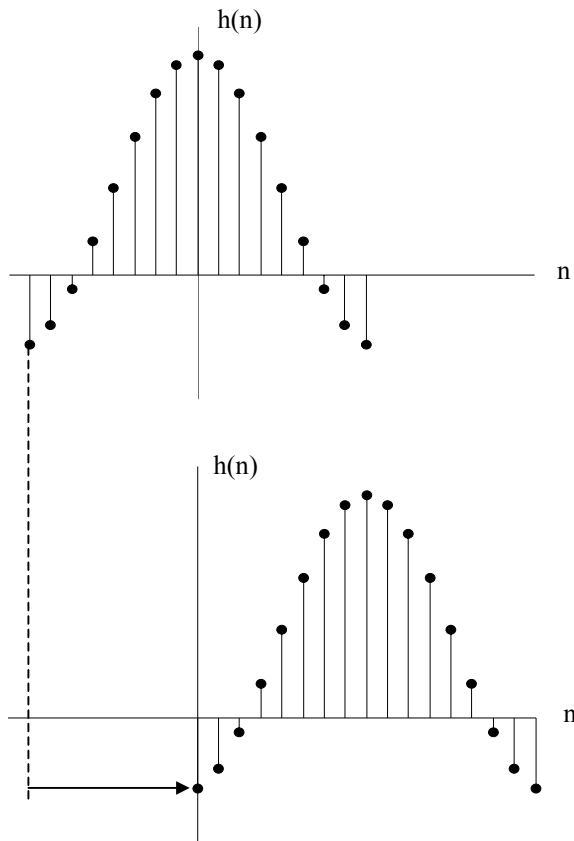


Réponse en fréquence du filtre analogique prototype

$$G_{anal}(j.\omega)$$

Echantillonnage en fréquence :

$$H(k) = G_{anal}\left(j.k.\frac{\omega_E}{N}\right)$$



Transformée de Fourier Discrète :

$$h(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-N/2}^{N/2} H(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$$

Décalage  
(filtre réalisable physiquement)

### 2.1.2 Synthèse des filtres R.I.I.

#### 1- Les différentes méthodes de synthèse:



Il existe plusieurs méthodes de synthèse des filtres RII, suivant le critère qu'on s'impose :

a- la réponse temporelle imposée est:

- une réponse impulsionnelle alors la méthode est appelée méthode d'invariance impulsionnelle

- réponse indicielle alors la méthode est appelée méthode d'invariance indicielle

b- simulation numérique d'une équation différentielle on a la méthode d'Euler et la méthode des trapèzes

c- la réponse en fréquence imposée alors la méthode est appelée transformation bilinéaire

Dans ces méthodes, on cherche à réaliser un filtre numérique à partir d'un

filtre analogique prototype de fonction de transfert  $G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p}$ , avec  $\tau = T_E$

## 2- Invariance impulsionnelle

Dans cette méthode on procède de la manière suivante:

$$G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p} \xrightarrow[\text{inverse}]{\text{Transformée de Laplace}} g(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \gamma(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Echantillonnage}} h(n) = T_E \cdot g(n.T_E) = \frac{T_E}{\tau} \cdot \left( e^{-\frac{T_E}{\tau}} \right)^n \cdot u(n)$$

$$\xrightarrow{\text{Transformée en Z}} H(z) = \frac{T_E}{\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}}$$

Remarque :  $G_{\text{anal}}(p)$  possède un pôle (valeur de  $p$  rendant  $G_{\text{anal}}(p)$  infini) :  $p = -\frac{1}{\tau}$

$H(z)$  possède un pôle :  $z = e^{-\frac{T_E}{\tau}} = e^{T_E \cdot p}$ , où  $p$  est le pôle de  $G_{\text{anal}}(p)$ .

## 3- Invariance indicielle

$$G_{\text{anal}}(p) = \frac{1}{1 + \tau.p} \Rightarrow Y(p) = G_{\text{anal}}(p) \cdot \Gamma(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau.p}$$

Dans cette méthode, on fait la transformée de Laplace inverse de  $Y(p)$  qui donne  $y(t)$  puis on échantillonne  $y(t)$  qui va donner  $y(n)$  (numérique) et enfin la TR en  $Z$  de  $y(n)$ .

$$\xrightarrow{\text{Laplace}} y(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \gamma(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Echantillonnage}} y(n) = \left( 1 - e^{-\frac{n.T_E}{\tau}} \right) \cdot u(n)$$

$$\xrightarrow{\text{Transformée en Z}} Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}} = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

On obtient donc l'expression de  $H(z)$  :

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Y(z) = 1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}} = \frac{\left( 1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \right) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-\frac{T_E}{\tau}} \cdot z^{-1}}$$