

Series of Exercises 02

Sets, Functions and Binary Relation

Exercise 1 Let the following sets : $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 8]$, $C =]-5, +\infty[$, $D = \{x \in \mathbb{R}, |x - 3| \leq 5\}$

1. What are the equality or inclusion relationships that exist between these sets ?
2. Find the complement in the following cases : $C_{\mathbb{R}}A, C_{\mathbb{R}}B, C_{\mathbb{R}}C, C_CB$.
3. Find $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A/C, (\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B)$, and $A \triangle B$.

Exercise 2 Let the set E and A, B, C are three parts of E

a. Show that :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
3. $A/(B \cap C) = (A/B) \cup (A/C)$ (homework)

b. Simplify

1. $C_E(A \cup B) \cap C_E(C \cup C_E A)$
2. $C_E(A \cap B) \cup C_E(C \cap C_E A)$.

Exercise 3 Let the functions $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ with $f(x) = 2 - x$ and $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ with $g(x) = x^2 + 1$

1. Find $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1, 1]), g^{-1}[0, 2]$
2. Is the function f bijective ? Justify
3. Is the function g bijective ? Justify
4. Can we calculate $g \circ f$ and $f \circ g$ Justify.

Exercise 4 I. Let the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geq 0 \end{cases}$$

1. Find the following sets : $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1, 2])$
2. f is one-to-one (injective) function ? f is onto (surjective) function ?

II. Let the function $g : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}^*$ defined by :

$$g(x) = \frac{9}{2x - 1}$$

Show that g is a bijection. Find the inverse function.

Exercise 5 Let f be a function from E to F . Let A and A' be two subsets of E , and let B and B' be two subsets of F

1. Show that

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$	2- $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (homework)
3- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ (devoir)	4- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
5- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$	6- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ (homework)

2. Show that if f is injective, then we have equality in (4).

Exercise 6 We define the relation $\mathfrak{R}$ on $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \mathfrak{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1. Show that $\mathfrak{R}$ is an equivalence relation.
2. Find the equivalence class of the pair $(0, 0)$.

Exercise 7 We define the relation T in $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y); (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) T (x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

1. Show that T is a order relation.
2. Is the order total or partial?

Exercise 8 We define the following relation S on $\mathbb{N}^*$:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : nSm \Leftrightarrow \text{there exists } k \in \mathbb{N}^* \text{ such that : } n = km$$

1. Verify that 6S2 and 5S1.
2. Show that the relation S is a partial order relation on $\mathbb{N}^*$.

Série de TD 02 Ensembles , Applications et Relations

exercice 1 On considère les ensembles suivants : $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 8]$, $C =]-5, +\infty[$,
 $D = \{x \in \mathbb{R}, |x - 3| \leq 5\}$

1. Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?
2. Déterminer le complémentaire dans les cas suivantes : $C_{\mathbb{R}}A, C_{\mathbb{R}}B, C_{\mathbb{R}}C, C_C B$ dans F .
3. Déterminer $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A/C, (\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B)$, et $A \triangle B$.

exercice 2 Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E

a. Montrer que :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
3. $A/(B \cap C) = (A/B) \cup (A/C)$ (devoir)

b. Simplifier

1. $C_E(A \cup B) \cap C_E(C \cup C_E A)$
2. $C_E(A \cap B) \cup C_E(C \cap C_E A)$.

exercice 3 Soient les applications $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ avec $f(x) = 2 - x$ et $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ avec $g(x) = x^2 + 1$

1. Déterminer $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1, 1]), g^{-1}[0, 2]$
2. L'application f est-elle bijective ? justifier
3. L'application g est-elle bijective ? justifier
4. Est ce que, on peut calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ justifier.

exercice 4 I. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les ensembles suivants : $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1, 2])$
2. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

II. Soit l'application $g : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par :

$$g(x) = \frac{9}{2x - 1}$$

Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque.

exercice 5 Soit f une application de E vers F . Soient A et A' deux parties de E , et soient B et B' deux parties de F

1. Montrer que

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$	2- $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (devoir)
3- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ (devoir)	4- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
5- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$	6- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ (devoir)

2. Montrer que si f est injective alors on a égalité dans (4).

exercice 6 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \mathfrak{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence.

2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$.

exercice 7 On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation T par :

$$\forall (x, y); (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) T (x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

1. Montrer que T est une relation d'ordre.

2. L'ordre est-il total ou partiel ?

exercice 8 On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation S suivante :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : nSm \Leftrightarrow \text{il existe un } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } n = km$$

1. Vérifier que 6S2 et 5S1.

2. Montrer que la relation S est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.