CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LA MODELISATION DES SYSTEMES

1.1. Introduction

La modélisation est une étape essentielle pour l'étude des systèmes au stade de leur conception, de leur exploitation et aussi au stade de leur rénovation ou modification. Elle trouve son application non seulement dans les domaines techniques pour lesquels elle a été développée mais aussi dans les domaines non techniques tels que la biologie, l'écologie, la sociologie et l'économie.

La modélisation consiste à traduire les informations, qu'on peut avoir sur le système ou processus considéré, sous une forme qu'on peut facilement manipuler afin d'en tirer un maximum de profit. Cette forme, qu'on appellera par la suite un **modèle**, doit reproduire au mieux le comportement du système physique face à une situation donnée.

Il faut tout d'abord distinguer deux types de modèles : le **modèle mathématique** et le **modèle physique**. Le choix d'un type de modèle dépend du domaine d'application, de l'objectif à atteindre et des moyens matériels dont on dispose.

Le **modèle mathématique** se fonde sur une approche algébrique, c'est à dire un ensemble de relations mathématiques tandis que le **modèle physique** est une réplique à petite échelle, souvent appelé modèle réduit, du système réel.

Dans tout ce qui suit nous nous intéressons uniquement aux modèles mathématiques.

1.2. Modélisation mathématique

La modélisation est la première étape de l'étude d'un système. Elle consiste à rassembler toutes les informations relatives au système considéré et à les traduire sous forme de relations mathématiques mettant en évidence les liens qui peuvent exister entre les variables considérées comme les entrées du système et les variables considérées comme ses sorties.

1.2.1. Modèle de connaissance

La première approche consiste à décomposer, éventuellement, le système en un ensemble de sous-systèmes et à appliquer les lois élémentaires de la physique, de la chimie, de l'électricité, de la mécanique, …etc, de façon à écrire toute les relations qui peuvent exister entre les entrées et les sorties de chaque sous-système, sans oublier les relations de liaisons entre les sous-systèmes. Cette représentation du système est appelée un **modèle de connaissance**.

1.2.2. Modèle de conduite

La deuxième approche de construction d'un modèle consiste à exploiter au maximum les données expérimentales prélevées sur les entrées et les sorties du système réel sans se préoccuper de ce qui se passe à l'intérieur. Ce type de modèle est aussi appelé modèle de représentation ou modèle « **boîte noire** ». Seule, compte l'efficacité du modèle obtenu, c'est à dire, son aptitude à décrire globalement le comportement dynamique du système (**modèle de comportement**).

1.3. Principaux modèles mathématiques

1.3.1. Modélisation par équations différentielles

La première idée qui nous vient à l'esprit lors de l'étude d'un système est de savoir comment varient certaines variables par rapport à d'autres. La forme générale de cette représentation est :

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} + \sum_{k=0}^{L} c_k \frac{d^k w(t)}{dt^k} \qquad (1.1)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du système. Ils sont généralement mesurables. Le terme $w(t)$ représente le signal perturbation, appelé généralement **bruit**, agissant sur le système. Les coefficients a_i, b_j, et c_k sont les **paramètres** du modèle, ils peuvent être constants ou variables. Dans le premier cas le modèle est dit **stationnaire ou invariant**, dans le second cas le modèle est dit **non stationnaire ou variant**.

1.3.2. Modélisation par fonctions de transfert

Dans ce cas la relation précédente s'écrit :

$$Y(s) = F_u(s)U(s) + F_w(s)W(s) \tag{1.2}$$

où $U(s)$, $Y(s)$, $W(s)$ sont respectivement les transformées de Laplace de $u(t)$, $y(t)$ et $w(t)$. $F_u(s)$ et $F_w(s)$ sont respectivement les fonctions de transfert relatives à l'entrée et à la perturbation du système. Elles ont les formes polynomiales générales suivantes:

$$F_u(s) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad F_w(s) = \frac{\sum_{k=0}^{L} c_k s^k}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \tag{1.3}$$

L'opérateur de Laplace est désigné ici par la lettre $s = jw$. Evidemment il faut s'assurer que les coefficients a_i ne sont pas tous nuls.

1.3. Exemples d'applications

1.3.1. Système mécanique

Soit le système mécanique de la figure 2. Il est composé d'une masse M, d'un ressort de coefficient de raideur K et d'un amortisseur de coefficient de frottement F. Soumis à une force extérieure $u(t)$, le ressort et l'amortisseur essaient de ramener la masse à sa position d'équilibre $x(t)$.

L'équation du mouvement de la masse M donne le modèle sous la forme d'une équation différentielle du second ordre :

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + F\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = u(t)$$

Le modèle sous forme fonction de transfert est donné par la relation suivante :

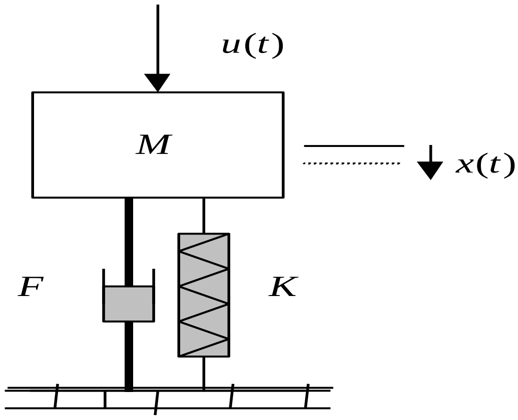

Fig. 1. Système mécanique

$$F(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Fs + K}$$

1.3.2. Système thermique

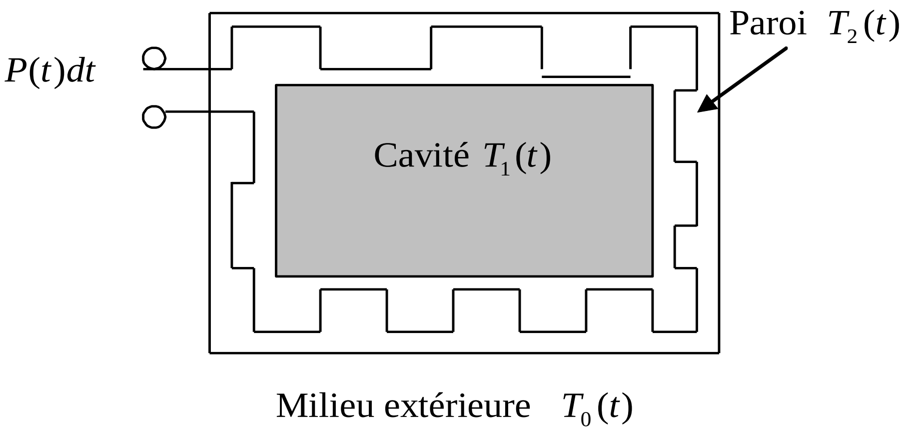

Fig. 3. Four électrique

Soit le four électrique représenté en figure 3 où $T_0(t)$ est la température du milieu ambiant, $T_1(t)$ est la température de la cavité et $T_2(t)$ est la température de la paroi. On suppose pour simplifier que les températures sont telles que $T_2 \succ T_1 \succ T_0$ et que l'énergie $P(t) = u(t)$ fournie pendant le temps dt fait augmenter la température de la paroi de dT_2 et elle est transmise en partie à la cavité et au milieu extérieure. De plus l'échange de chaleur entre deux milieux est proportionnel à leur différence de température.

Dans ces conditions le modèle sera défini par les équations différentielles suivantes:

Pour la paroi on a: $P(t)dt = m_2C_2dT_2 + a_{21}(T_2 - T_1)dt + a_{20}(T_2 - T_0)dt$

Et pour la cavité on a : $m_1C_1dT_1 = a_{21}(T_2 - T_1)dt$

Où m est la masse de la paroi (cavité), C est la chaleur spécifique de la paroi (cavité), a_{ij} est le coefficient de transfert de chaleur.

On pose: $\theta_1 = \dfrac{a_{21}}{m_1C_1}$, $\theta_2 = \dfrac{a_{21}}{m_2C_2}$, $\theta_3 = \dfrac{a_{20}}{m_2C_2}$, $\theta_4 = \dfrac{1}{m_2C_2}$

1) Mettre le modèle sous la forme de deux équations différentielles,

En arrangeant les équations de façon à mettre en évidence les dérivées on obtient:

$$\frac{dT_1(t)}{dt} = \frac{a_{21}}{m_1C_1}(T_2 - T_1)$$

$$\frac{dT_2(t)}{dt} = -\frac{a_{21}}{m_2C_2}(T_2 - T_1) - \frac{a_{20}}{m_2C_2}(T_2 - T_0) + \frac{u(t)}{m_2C_2}$$

2) Mettre le modèle sous la forme d'une équation différentielle du second ordre dont l'entrée est $u(t)$ et la sortie est $T_1(t)$.

3) Mettre le modèle sous la forme d'un modèle d'état où $T_0(t)$ représente la perturbation du milieu extérieur. Préciser les différentes matrices du modèle d'état.

4) Déterminer les fonctions de transfert $F_U(s) = \dfrac{T_1(s)}{U(s)}$ et $F_T(s) = \dfrac{T_1(s)}{T_0(s)}$ du four par rapport à la commande $u(t)$ et à la perturbation, $T_0(t)$,

5) Application numérique : Donner les formes numériques des modèles précédents en prenant les données suivantes : $m_1C_1 = 0.5$, $m_2C_2 = 2.0$, $a_{21} = 1$ et $a_{20} = 0.5$

6) On supposera négligeable l'influence de la température du milieu extérieur $T_0(t)$ et en utilisant la méthode des différences finies donner la forme discrète du modèle correspondant à la méthode des différences avancées, retardées et des différences centrales.

7) Application numérique : $\Delta t = T_e = 0.25$ est la période d'échantillonnage.

13.3. Système hydraulique

Soit le système hydraulique de la figure 4. Les équations d'équilibre sont :

Pour le réservoir 1: $$Q_1 - Q_c = C_1 \frac{dh_1(t)}{dt}$$

Pour le réservoir 2: $$Q_c - Q_0 = C_2 \frac{dh_2(t)}{dt}$$

avec $Q = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = C\frac{dh}{dt}$ comme débit, V étant le volume du réservoir, C sa capacité, h le niveau du liquide et R la résistance de la vanne, $R = \frac{h_1 - h_2}{Q_c}$.

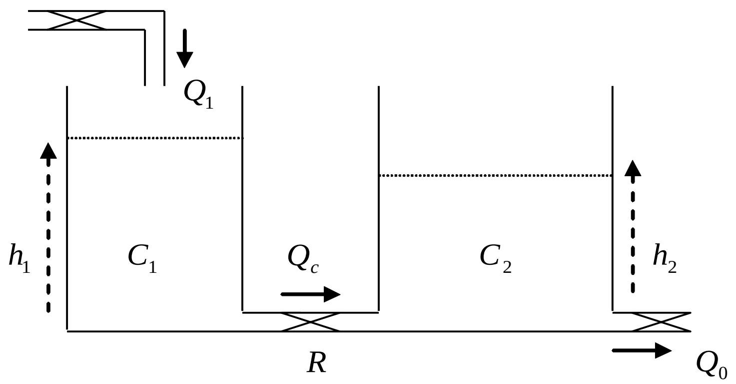

Fig. 4. Système hydraulique

Le modèle peut être mis sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre comme suit :

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{1}{RC_1}h_1(t) + \frac{1}{RC_1}h_2(t) + \frac{Q_1}{C_1}$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{RC_2}h_1(t) - \frac{1}{RC_2}h_2(t) - \frac{Q_0}{C_2}$$

Q_1 joue le rôle de la commande et Q_0 le rôle d'une perturbation donc ce modèle est un exemple de modèle stochastique.

Le modèle sous la forme de fonction de transfert en prenant $h_2(t)$ comme sortie est:

$$H_2 = \frac{R/C_1}{R^2C_1C_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}Q_1 + \frac{R/C_2\,(RC_1s + 1)}{R^2C_1C_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}Q_0$$