TP N 02 : Synthèse et application d'un filtre RII pass-bas par transformation bilinéaire.

<u>But de TP</u>: Dans ce TP, on synthétisera un filtre RII par **la méthode des pôles et zéros** puis la **méthode de l'invariance impulsionnelle** et enfin **par transformation bilinéaire** en utilisant des filtres **analogiques (chebychev et Butterworth).**

I. Qu'est-ce que la transformation bilinéaire ?

La **transformation bilinéaire** est une technique qui permet de convertir un filtre **analogique** (dans le domaine de Laplace, s) en un filtre **numérique** (dans le domaine de la transformée en z) tout en préservant certaines caractéristiques, comme la stabilité du filtre et la forme de la réponse en fréquence.

Elle repose sur un remplacement spécifique de la variable s (de Laplace) par une expression en z (de la transformée en z) qui est donnée par :

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Où :

- s est la variable complexe dans le domaine analogique (fonction de Laplace),
- z est la variable complexe dans le domaine discret (fonction de la transformée en z),
- T est la période d'échantillonnage du système numérique.

I.1. Contexte d'utilisation de la transformation bilinéaire

Dans la conception de filtres numériques à partir de filtres analogiques, il est souvent nécessaire de faire passer un système du domaine **analogique** au domaine **numérique** tout en gardant une correspondance entre les caractéristiques du filtre analogique (comme la fréquence de coupure, les pôles et zéros) et celles du filtre numérique.

Cependant, la simple substitution de **s** par **z** dans la fonction de transfert analogique ne suffirait pas à préserver la réponse en fréquence du filtre. C'est là qu'intervient la transformation bilinéaire. Cette technique permet de garantir que la transformation conserve des propriétés importantes, comme :

- La stabilité du filtre (les pôles restent dans le cercle unité du plan complexe z),
- Une correspondance entre les réponses en fréquence analogiques et numériques, notamment la préservation de la fréquence de coupure (ou des bandes passantes).

I.2. Étapes d'application de la transformation bilinéaire

Supposons que nous avons un filtre analogique de la forme suivante, avec une fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Pour appliquer la transformation bilinéaire, nous procédons comme suit :

1. **Remplacer chaque occurrence de s dans H(s)** par la transformation bilinéaire :

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

2. **Simplifier l'expression obtenue** pour obtenir une fonction de transfert dans le domaine numérique H(z).
3. **Réaliser l'implémentation numérique** : La fonction de transfert numérique H(z) peut ensuite être exprimée sous forme d'une **relation aux différences**, que l’on peut implémenter dans un processeur numérique.

I.3. Avantages de la transformation bilinéaire

- **Préservation de la stabilité** : Les pôles du filtre analogique sont transformés de manière à garantir que le filtre numérique reste stable. Autrement dit, si un filtre analogique est stable, le filtre numérique le sera également.
- **Réponse en fréquence préservée** : Bien que la transformation bilinéaire modifie la position des pôles et des zéros, elle garantit que les réponses en fréquence analogiques et numériques sont approximativement similaires (en particulier pour les fréquences basses).
- **Contrôle des fréquences** : La transformation bilinéaire conserve la relation entre la fréquence de coupure analogique et numérique, bien que l'échelle de fréquence puisse être non-linéaire dans certaines situations.

I.4. Exemple pratique : filtre passe-bas: Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas analogique de premier ordre :

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Nous appliquons la transformation bilinéaire pour obtenir la version numérique de ce filtre.

1. Remplaçons s dans H(s) par la transformation bilinéaire :

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Supposons une période d'échantillonnage T=1. La fonction de transfert devient :

$$H(s) = \frac{1}{\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} + 1}$$

Simplifions cette expression pour obtenir la fonction de transfert numérique :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{3 + z^{-1}}$$

II. Rappels sur les filtres RII :

Les filtres RII n'auront pas une phase linéaire (phase linéaire : temps de propagation constant pour tout fréquence). L'intérêt des filtres récursifs (RII) est leur faible coût en calcul. Les inconvénients des filtres récursifs sont : leur non-linéarité en phase ; et leur instabilité numérique. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles, dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant rétroactive, les erreurs de précision numériques deviennent une question d'importance, car ils peuvent s'amplifier et devenir dehors contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. Mais, les filtres RII peuvent être conçus par des méthodes semblables à ceux utilisé pour les filtres analogiques.

III. Analyse d'un filtre RII :

Soit le filtre h(n) décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = 1.2y(n-1) - 0.516y(n-2) + 0.079x(n) + 2 * 0.079x(n-1) + 0.079x(n-2)$$

- La première étape consiste à déterminer les vecteurs b et a. On calcul H(z) (coefficient en z^{-1}) et on trouve : Numérateur : [0.079 2*0.079 0.079] et Dénominateur : [1 -1.2 0.516].
- Puis, par programme on peut : déterminer et tracer la réponse impulsionnelle, la réponse fréquentielle (module et phase), le retard de groupe, les pôles et les zéros étudier la stabilité, la nature d filtre, etc.

```
clear all; close all; clc ;% Initialisation des vecteurs de coefficient de N et D
b = [0.079 2*0.079 0.079] ;   % Numérateur
a = [1 -1.2 0.516]       ;        % Dénominateur
figure(1) ; zplane(b,a)           % Les pôles et les zéros
N = 32 ; n=0:N-1 ;
delta = [1;zeros(N-1,1)] ;        %  Impulsion de Dirac
h = filter(b,a,delta)      ;      % En filtrant une impulsion par la commande « filter ». La réponse
impulsionnelle
figure(2) ;
stem(n,h)                  ;
echelon = ones(1,N)    ;        %  Echelon unitaire
h_ind = filter(b,a,echelon) ;  % La réponse indicielle
figure(3) ; stem(n,h_ind)   ;


L = 256 ; fe = 1 ;
[H,f]=freqz(b,a,L,fe) ;  % Calcule de H(f) pour Npts valeur de f entre 0 et fe/2 en normalisant fe à 1.
module = abs(H)    ;
figure(4) ; plot(f,module)  ;            % Tracé de module de H en linéaire
phase = angle(H) ;
figure(5) ; plot(f,phase)       ;          % Tracé de module de la phase
figure(6) ; plot(f,20*log10(H)) ;       % Tracé de module de H en dB
[tau,f]=grpdelay(b,a,L,fe)              % Calcule du temps de propagation de groupe
figure(7) ; plot(f,tau)         ;          % Tracé du temps de propagation de groupe
[num,den]=freqz(H,h,2,2
)
```

1- Calculer les pôles de ce filtre (à préparer), correspondent-ils à ceux de la figure1 ?
2- A partir du tracé des pôles et des zéros, esquisser l'allure de $h(n)$ et $H(f)$ en justifiant vos réponses (à préparer). Confirmer avec les figures (2) et (4).
3- Etudier la stabilité du filtre (à partir du tracé des pôles et de zéros h(n)). Quel est le rôle de ce filtre ?
4- Quelle valeur de b faut-il changer pour faire de ce filtre un passe-haut ?
5- Modifier les valeurs de a pour avoir une réponse impulsionnelle divergente. Le filtre obtenu est-il stable ?
6- Enlever les commentaires et comparer les figures 5 et 6. Quel lien les relie ?
7- Quel retard de groupe souhaite-t-on avoir dans la bande passante du filtre ?

IV. Synthèse d'un filtre numérique par placement des pôles et zéros :

Il s'agit de déterminer, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert, les coefficients d'un filtre et l'équation de récurrence d'un filtre numérique coupe-bande du second ordre qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence à rejeter : 125 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ±10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

```
clear all; close all; clc;
fe = 500 ; df = 10 ;   fc = 125 ;
teta = 360*fc/fe ; tet = 2*pi*fc/fe ;
R = 1-df*pi/fe;
K = (exp(2*j*teta)-2*R*cos(teta)*exp(j*teta)+R*R)/(exp(2*j*teta)-1);
K =abs(K) ;
a = [1 -2*R*cos(tet)+ R*R] ;
b = K*[1 0 -1]            ;
dirac = [1;zeros(99,1)]   ;
h = filter(b,a,dirac)     ;
[H  F] = freqz(b,a,512,fe) ;
[tau, f] = grpdelay(b,a,512,fe) ;
figure;
subplot(2,2,1) ; hold on ; plot(h,'r')        ;
subplot(2,2,2) ; hold on ; plot(F,abs(H),'r') ;
subplot(2,2,3) ; hold on ; zplane(b,a)        ;
subplot(2,2,4) ; hold on ; plot(f,tau,'r')    ;
```

1- Quelle est la nature de la bande passante crée.
2- Modifier ce programme pour en faire un coup-bande et commenter les graphes obtenus.
3- Reprendre ce programme pour filtrer le signal ecg (fe=500Hz, et bruit à 50Hz).
   - Visualiser les TFD du signal avant et après filtrage.
   - Comparer avec la méthode des fenêtres, laquelle vous semble préférable (justifier).

I. Synthèse d'un filtre numérique par transformation d'un filtre analogique :

Pour déterminer les coefficients du filtre RII, il suffit de synthétiser chaque filtre en continu $H(p)$ puis de passer à $H(z)$, soit par transformation bilinéaire, ou par invariance impulsionnelle.

On veut, par exemple, synthétiser un filtre pass-bas avec les spécifications suivantes :
$F_e = 3000Hz$; $f_p = 500Hz$, et une oscillation en bande passante $\delta_1 < 3\ db$ et une atténuation en bande atténuée $\delta_2 < 40db$.

On commence par choisir un filtre analogique normalisé $H_n(p)$ (en continu) d'ordre N, puis on le dénormalise pour créer $H(p)$ continu. Ensuite une méthode de transformation permettant trouver les paramètres du filtre numérique.

```
Fe = 3000; fp = 500; att_p=3 ; att_a = 40 ; N = 10 ;
wp = fp*2*pi ;
[z,p,k] = cheb1ap(N,att_p)    ;
[Bpn,Apn] = zp2tf (z,p,k)     ;
[Bp, Ap]  = lp2lp(Bpn,Apn,wp)  ;
[Bn, An]  = impinvar(Bp,Ap,Fe) ;
figure ;
subplot(1,2,1) ; zplane(1,Ap)  ;
subplot(1,2,2) ; zplane(1,An)  ;
[r,p,k] = residue(Bp,Ap)         ;
t= 0:1/(5*Fe):0.02               ;
ha = exp(t'*(p.'))*r             ;
hn = filter(Bn,An,[1;zeros(49,1)])         ;
figure ;
subplot(1,2,1); plot(t,ha) ; hold on          ;
stem(0:1/Fe:49/Fe*hn,'r.')
[Ha,w]=freqz(Bp,Ap,2*pi*(1:20:Fe/2))   ;
subplot(1,2,2); plot(w/(2*pi),abs(Ha))    ;
hold on ;  stem (f,abs(H),'r.')             ;
```

1) Que contiennent z, p et k, B_{pn}, A_{pn}, B_p, A_p ?
2) A partir du tracé des pôles, étudier la stabilité des 2 filtres.
3) Aidez vous du help pour expliquer les instructions :

zp2tf (z,p,k); lp2lp(Bpn,Apn,wp) ; [r,p,k] = residue(Bp,Ap); t= 0:1/(5*Fe):0.02 ; ha = exp(t'*(p.'))*r ;
hn = filter(Bn,An,[1;zeros(49,1)]) ; freqz(N,D,2*pi*(1:20:Fe/2)) ; plot(w/(2*pi),abs(Ha));

4) Commenter les réponses imulsionnelle et fréquentielles.
5) Quelles sont les caractéristiques du filtre de chebychev (avantages et inconvénient).
6) Que se passe-t-il si on augmente N ?
7) Testez les autres filtres analogiques et commenter les différences (oscillations, Δf, etc).
8) Que faut-il modifier pour en faire un pass-haut ?
9) Quel est l'inconvénient principal de l'approche par invariance impulsionnelle ?

On veut refaire le même travail en employant la transformation bilinéaire

```
[Bn, An]  = bilinear(Bp,Ap,Fe,fp) ;
```

- Comparer les 2 méthodes lorsque f_p est proche de la demi-fréquence d'échantillonnage $f_e/_2$.
- Tester le fonction **cheb1ord**.