L1 Informatics	Badji Mokhtar – Annaba University	2024/2025
Algebra 1	Faculty of Technology	Dr. Neggal bilel
	Department of Informatics	

Series of Exercises 03
Algebraic Structure

Exercice 1 1. *We provide $\mathbb{R}$ with the internal composition law $*$ defined by :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- *Show that $*$ are commutative laws, not associative laws, and 1 is a neutral element of $*$.*
- *Solve the following equations : $x * 2 = 5$ and $x * x = 1$*

2. *We provide $\mathbb{R}^{+*}$ with the internal composition law $*$ defined by :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- *Show that $*$ are commutative laws, associative laws, and 0 is a neutral element of $*$.*
- *Show that no element of $\mathbb{R}^{+*}$ has an inverse element with $*$.*

Exercice 2 *Let $*$ the internal composition law defined in $\mathbb{R}$ by :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + x^2 y^2$$

1. *Verify $*$ are commutative laws.*
2. *The law $*$ is it associative ?*
3. *Show that $\mathbb{R}$ have a neutral element for the law $*$ then calculate this neutral.*
4. *Solve the following equations : $1 * x = 1, \quad 2 * x = 7$*

Exercice 3 *Let the four functions of $\mathbb{R}^*$ in $\mathbb{R}^*$:*

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Show that (G, o) an abelian group (commutative group) with $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Exercice 4 *Let $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ and $*$ the law in G defined by :*

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. *Show that $(G; *)$ is a commutative group.*
2. *Let $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Show that $(G', *)$ is a subgroup of $(G, *)$*

Exercice 5 *We consider on $\mathbb{R}$ an internal composition law given by :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. *Show that $(\mathbb{R}, *)$ is an abelian group.*

2. *Let the two applications be defined of* $(\mathbb{R}, *)$ *in* $(\mathbb{R}, +)$ *by :*

$$f(x) = 3x \quad and \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Are these applications an homomorphism from a group $(\mathbb{R}, *)$ *to a group* $(\mathbb{R}, +)$ *?*

Exercice 6 (will be resolved at course) *We provide* $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *of two laws defined by :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad et \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. *Show that* $(A, +)$ *is an commutative group.*
2. ***(a)*** *Show that the law* $\times$ *is commutative.*
   (b) *Show that* $\times$ *is associative.*
   (c) *Find the neutral element of* A *for the law* $\times$ *.*
   (d) *Show that* $(A, +, \times)$ *is a commutative ring.*

Série de TD 03
Les Structures Algèbriques

exercice 1 *1. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- *Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.*
- *Résoudre les équations suivantes : $x * 2 = 5 \quad$ et $\quad x * x = 1$*

2. On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- *Montrer que $*$est commutative, associative, et que0 est un élément neutre.*
- *Montrer que aucun élément de $\mathbb{R}^{+*}$ n'a de symétrique pour $*$.*

exercice 2 *Soit $*$ la loi interne définie dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + x^2y^2$$

1. *Vérifier que $*$ est commutative.*
2. *La loi $*$ est-elle associative ?*
3. *Montrer que $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour la loi $*$ et calculer ce neutre.*
4. *Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R} : 1 * x = 1 \quad , 2 * x = 7$*

exercice 3 *Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$:*

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Montrer que (G, o) est un groupe abélien (commutatif) avec $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

exercice 4 *Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :*

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. *Montrer que $(G; *)$ est un groupe non commutatif.*
2. *Soit $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Montrer que $(G', *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$*

exercice 5 *On considère sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne donnée par :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.*

2. *Soit les deux applications définies de* $(\mathbb{R}, *)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$ *par :*

$$f(x) = 3x \quad et \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles des morphismes de groupes ?

exercice 6 (Sera résolu au niveau du cours) *On munit* $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *de deux lois définies par :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad et \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. *Montrer que* $(A, +)$ *est un groupe commutatif.*
2. ***(a)*** *Montrer que la loi* $\times$ *est commutative.*
   (b) *Montrer que* $\times$ *est associative*
   (c) *Déterminer l'élément neutre de* A *pour la loi* $\times$ *.*
   (d) *Montrer que* $(A, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*