Series of Exercises 02
Sets, Functions and Binary Relation

Exercice 1 *Let the following sets :* $A =]-\infty, 3]\,, B = [-2, 8]\,, C =]-5, +\infty[,\ D = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| \leq 5\}$

1. *What are the equality or inclusion relationships that exist between these sets ?*
2. *Find the complement in the following cases :* $C_{\mathbb{R}}A, C_{\mathbb{R}}B, C_{\mathbb{R}}C, C_C B$.
3. *Find* $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A/C, (\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B)$*, and* $A \triangle B$.

Exercice 2 *Let the set* E *and* A, B, C *are three parts of* E
a. Show that :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
3. $A/(B \cap C) = (A/B) \cup (A/C)$ *(homework)*

b. Simplify

1. $C_E(A \cup B) \cap C_E\,(C \cup C_E A)$
2. $C_E(A \cap B) \cup C_E\,(C \cap C_E A)$.

Exercice 3 *Let the functions* $f : [0, 1] \to [0, 2]$ *with* $f(x) = 2 - x$ *and* $g : [-1, 1] \to [0, 2]$ *with* $g(x) = x^2 + 1$

1. *Find* $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1, 1]), g^{-1}[0, 2])$
2. *Is the function* f *bijective ? Justify*
3. *Is the function* g *bijective ? Justify*
4. *Can we calculate* $g \circ f$ *and* $f \circ g$ *Justify.*

Exercice 4 ***I.*** *Let the function* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *defined by :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. *Find the following sets :* $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1, 2])$
2. f *is one-to-one (injective) function ?* f *is onto (surjective) function ?*

II. *Let the function* $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *defined by :*

$$g(x) = \frac{9}{2x - 1}$$

Show that g *is a bijection. Find the inverse function.*

Exercice 5 *Let* f *be a function from* E *to* F*. Let* A *and* A' *be two subsets of* E*, and let* B *and* B' *be two subsets of* F

1. *Show that*

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$	$2 - f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B($ *homework* $)$
S- $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)($ *devoir* $)$	$4 - f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$
$5 - f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}\left(B'\right)$	$6 - f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$ *(homework)*

2. *Show that if f is injective, then we have equality in (4).*

Exercice 6 *We define the relation $\Re$ on $\mathbb{R}^2$:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \Re \left(x', y'\right) \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1. *Show that $\Re$ is an equivalence relation.*
2. *Find the equivalence class of the pair $(0, 0)$.*

Exercice 7 *We define the relation T in $\mathbb{R}^2$:*

$$\forall (x, y); (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y) T (x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

1. *Show that T is a order relation.*
2. *Is the order total or partial ?*

Exercice 8 *We define the following relation S on $\mathbb{N}^*$:*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : nSm \Leftrightarrow \quad \textit{there exists} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \textit{such that :} \quad n = \mathrm{km}$$

1. *Verify that $6S2$ and $5S1$.*
2. *Show that the relation S is a partial order relation on $\mathbb{N}^*$.*

Série de TD 02
Ensembles , Applications et Relations

exercice 1 *On considère les ensembles suivants :* $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 8]$, $C =]-5, +\infty[$, $D = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| \leq 5\}$

1. *Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles ?*
2. *Déterminer le complémentaire dans les cas suivantes :* $C_{\mathbb{R}}A, C_{\mathbb{R}}B, C_{\mathbb{R}}C, C_C B$ *dana* F.
3. *Déterminer* $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A/C, (\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B)$, *et* $A \triangle B$.

exercice 2 *Soit* E *un ensemble,* A, B *et* C *trois parties de* E
a. Montrer que :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
3. $A/(B \cap C) = (A/B) \cup (A/C)$ *(devoir)*

b. Simplifier

1. $C_E(A \cup B) \cap C_E(C \cup C_E A)$
2. $C_E(A \cap B) \cup C_E(C \cap C_E A)$.

exercice 3 *Soient les applications* $f : [0,1] \to [0,2]$ *avec* $f(x) = 2 - x$ *et* $g : [-1,1] \to [0,2]$ *avec* $g(x) = x^2 + 1$

1. *Déterminer* $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1,1]), g^{-1}[0,2])$
2. *L'application* f *est-elle bijective ? justifier*
3. *L'application* g *est-elle bijective ? justifier*
4. *Est ce que, on peut calculer* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *justifier.*

exercice 4 ***I.*** *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. *Déterminer les ensembles suivants :* $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1,2])$
2. f *est-elle injective ?* f *est-elle surjective ?*

II. *Soit l'application* $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *définie par :*

$$g(x) = \frac{9}{2x-1}$$

Montrer que g *est une bijection. Déterminer son application réciproque.*

exercice 5 *Soit* f *une application de* E *vers* F. *Soient* A *et* A' *deux partie de* E , *et soient* B *et* B' *deux partie de* F

1. *Montrer que*

1- $A \subset f^{-1}(f(A))$	$2 - f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B($ *devoir* $)$
S- $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)($ *devoir* $)$	$4 - f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$
$5 - f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}\left(B'\right)$	$6 - f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$ *(devoir)*

2. *Montrer que si f est injective alors on a égalité dans (4).*

exercice 6 *On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\Re$ par :*

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\Re\left(x',y'\right) \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

1. *Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.*
2. *Trouver la classe d'équivalence du couple* $(0,0)$.

exercice 7 *On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation T par :*

$$\forall(x,y); (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)T(x',y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

1. *Montrer que T est une relation d'ordre.*
2. *L'ordre est-il total ou partiel ?*

exercice 8 *On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation S suivante :*

$$\forall(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : nSm \Leftrightarrow \quad \textit{il existe un} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \textit{tel que :} \quad n = \mathrm{km}$$

1. *Vérifier que $6S2$ et $5S1$.*
2. *Montrer que la relation S est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.*

Corrigé Série de TD 02

Corrigé exercice 1 *Soient :* $A =]-\infty, 3]\,, B = [-2, 8]\,, C =]-5, +\infty[, D = \{x \in \mathbb{R}, |x-3| \leq 5\}$.

1. *Relations d'égalité ou d'inclusion qui existent entre ces ensembles :*
   On a : $|x-3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-3 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \leq 8 \Rightarrow x \in [-2, 8]$
   donc : $B = D \subset C$
2. *Déterminons le complémentaire :*
   $C_{\mathbb{R}}A =]3, +\infty[, \quad C_{\mathbb{R}}B =]-\infty, -2[\cup]8, +\infty[, \quad C_{\mathbb{R}}C =]-\infty, -5], \quad C_C B =]-5, -2[\cup]8, +\infty[$
3. *Déterminons les ensembles suivants :*
   $A \cap B = [-2, 3], \quad A \cup B =]-\infty, 8], \quad A \cap C =]-5, 3], \quad A \cup C =]-\infty, +\infty[$
   $A/C =]-\infty, -5]$
   $A \triangle B = (A/B) \cup (B/A) =]-\infty, -2[\cup]3, 8]$
   $(\mathbb{R}/A) \cap (\mathbb{R}/B) = (]3, +\infty[) \cap (]-\infty, -2[\cup]8, +\infty[) =]8, +\infty[$.

Corrigé exercice 2 *Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E*

a. Montrerons que :

1. $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$
   <u>Méthode 1 :</u> *on a*

$$\begin{aligned} A \cap B) \cup C_E B &= (A \cup C_E B) \cap (B \cup C_E B) \\ &= (A \cup C_E B) \cap E \\ &= A \cup C_E B \end{aligned}$$

   <u>Méthode 2 :</u> *montrons que* $(A \cap B) \cup C_E B \subset A \cup C_E B$ *et* $A \cup C_E B \subset (A \cap B) \cup C_E B$ *:*
   1.1)*Montrons que :* $(A \cap B) \cup C_E B \subset A \cup C_E B$ *:*

$$\forall x \in (A \cap B) \cup C_E B \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ ou \\ A \in C_E B \end{cases}$$

   — *si* $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \quad et \quad x \in B \quad alors : x \in A \Rightarrow x \in A \cup C_E B$
   — *si* $x \in C_E B \Rightarrow x \in A \cup C_E B$
   d'où

$$(A \cap B) \cup C_E B \subset A \cup C_E B \tag{1}$$

   1.2) *Montrons que :* $A \cup C_E B \subset (A \cap B) \cup C_E B$

$$\forall x \in A \cup C_E B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ ou \\ x \in C_E B \end{cases}$$

   — *si* $\quad x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \quad alors \quad x \in (A \cap B) \cup C_E B$
   — *si* $\quad x \in C_E B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C_E B$
   d'où

$$A \cup C_E B \subset (A \cap B) \cup C_E B \tag{2}$$

   de (1) *et* (2) *on déduit que :* $(A \cap B) \cup C_E B = A \cup C_E B$.
2. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$
   <u>Méthode 1 :</u> *on a*

$$\begin{aligned} (A/B)/C &= (A \cap C_E B) \cap C_E C \\ &= A \cap (C_E B \cap C_E C) \\ &= A \cap C_E(B \cup C) = A/(B \cup C) \end{aligned}$$

<u>Méthode 2 :</u> *montrons que* $(A/B)/C \subset A/(B\cup C)$ *et* $A/(B\cup C) \subset (A/B)/C$ *:*

2.1) *Montrons que :* $(A/B)/C \subset A/(B\cup C)$

$\forall x \in (A/B)/C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in A \\ et\ \ x\notin B \\ et\ \ x\notin C \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in A \\ et \\ x\notin B\cup C \end{array}\right.$

alors : $x\in A/(B\cup C)$ *donc :*

$$(A/B)/C \subset A/(B\cup C) \tag{3}$$

2.1) *Montrons que :* $A/(B\cup C)\subset (A/B)/C$

$\forall x \in A/(B\cup C) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in A \\ et\, x\notin B\cup C \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in A \\ et\quad x\notin B \\ et\quad x\notin C \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in A/B \\ et\, x\notin C \end{array}\right.$

alors : $x\in (A/B)/C$ *donc :*

$$A/(B\cup C)\subset (A/B)/C \tag{4}$$

de (3) *et* (4) *on déduit que :* $(A/B)/C = A/(B\cup C)$

3. $A/(B\cap C) = (A/B)\cup(A/C)$

$$\begin{aligned} A/(B\cap C) &= A\cap C_E(B\cap C) \\ &= A\cap(C_EB\cup C_EC) \\ &= (A\cap C_EB)\cup(A\cap C_EC) \\ &= (A/B)\cup(A/C) \end{aligned}$$

b. La simplifications :

1. $C_E(A\cup B)\cap C_E\,(C\cup C_EA)$

$$\begin{aligned} C_E(A\cup B)\cap C_E(C\cup C_EA) &= (C_EA\cap C_EB)\cap(C_EC\cap A) \\ &= (A\cap C_EA)\cap(C_EB\cap C_EC) \\ &= \varnothing\cap(C_EB\cap C_EC) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

2. $C_E(A\cap B)\cup C_E\,(C\cap C_EA)$.

$$\begin{aligned} C_E(A\cap B)\cup C_E\,(C\cap C_EA) &= (C_EA\cup C_EB)\cup(C_EC\cup A) \\ &= (A\cup C_EA)\cup(C_EB\cup C_EC) \\ &= E\cup(C_EB\cup C_EC) \\ &= E \end{aligned}$$

Corrigé exercice 3 *Soient* $f:[0,1]\to[0,2]$ *avec* $f(x)=2-x$ *et* $g:[-1,1]\to[0,2]$ *avec* $g(x)=x^2+1$

1. Déterminons : $f(\{\frac{1}{2}\}), f^{-1}(\{0\}), g([-1,1]), g^{-1}[0,2])$

- $f(\{\frac{1}{2}\}) = \big\{f(x)\in[0,2],\quad x\in\{\frac{1}{2}\}\big\} = \big\{f(\frac{1}{2})\big\} = \big\{\frac{3}{2}\big\}$
- $f^{-1}(\{0\}) = \{x\in[0,1],\quad f(x)\in\{0\}\}$
  on a : $f(x)\in\{0\}\Leftrightarrow f(x)=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow x=2\notin[0,1]$
  donc :$f^{-1}(\{0\})=\varnothing$

- $g([-1,1]) = \{g(x) \in [0,2], \quad x \in [-1,1]\}$
  on a : $x \in [-1,1] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$
  $\Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq 2$
  $g(x) \in [1,2] \subset [0,2]$
  donc : $g([-1,1]) = [1,2]$
- $g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1], \quad g(x) \in [0,2]\}$
  $g(x) \in [0,2] \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 1 \leq 2$
  $\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1$
  $\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$
  $\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in [-1,1]$
  donc : $g^{-1}([0,2]) = [-1,1]$

2. *L'application f est bijective* $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ \text{et} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$

   2.1) *l'injectivité :*
   f injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [0,1], \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   on a :$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, *donc : f est injective.*
   2.2) *la surjectivité :*
   f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in [0,2], \exists\, x \in [0,1]$ *tel que* $y = f(x)$
   on a : $y = f(x) \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow x = 2 - y \notin [0,1]$ *(car pour* $y = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [0,1]$*)*
   donc f n'est pas surjective et par la suite f n'est pas bijective .

3. *L'application g est bijective* $\Leftrightarrow \begin{cases} g \text{ injective} \\ \text{et} \\ g \text{ surjective} \end{cases}$

   3.1) *l'injectivité :*
   g injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [-1,1], \quad g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   où : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
   on a :$-2 \neq 2$ *mais* $g(-2) = g(2) = 5$
   donc : g n'est pas injective par la suite g n'est pas bijective .

4. *On ne peut pas calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ car l'ensemble d'arriver et l'ensemble de départ dans les deux cas n'est pas les même*

Corrigé exercice 4 ***I.*** *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :* $f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 + x & , x \geqslant 0 \end{cases}$

1. *Déterminons :* $f(\mathbb{R}^+), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([1,2])$
   - $f(\mathbb{R}^+) = \{f(x)\,, x \in \mathbb{R}^+\}$
     on a : $x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in [0,+\infty[\Rightarrow x \geq 0 \Longrightarrow x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \in [1,+\infty[$
     donc : $f(\mathbb{R}^+) = [1,+\infty[$
   - $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}\,, f(x) = 0\}$
     — *Sur*$]-\infty,0[\,, f(x) = 0$ *n'admet pas de solution.*
     — *Sur* $[0,+\infty[\,, f(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ *donc* $x = -1 \notin [0,+\infty[$
     d'où : $\nexists x \in \mathbb{R}$, *tel que :* $f(x) = 0$ *donc :* $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$
   - $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}\,, f(x) = 1\}$
     — $\forall x \in]-\infty,0[$ *on a :* $f(x) = 1$
     — *pour* $x \in [0,+\infty[\Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$
     donc :$f^{-1}(\{1\}) =]-\infty,0[\cup \{0\} =]-\infty,0]$

- $f^{-1}([1,2]) = f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(]-1,2])$
  $f^{-1}(\{1\}) =]-\infty, 0]$ *(déjà calculé)*
  $f^{-1}(]1,2]) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in]1,2]\}$

— *pour* $x \in]-\infty, 0[$, *il est clair qu'il n'existe pas de réels négatif ayant une image dans l'intervalle* $]1,2]$.

— *pour* $x \in [0, +\infty[$, $1 < x+1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$
Ainsi $f^{-1}(]1,2]) =]0,1]$
d'où $f^{-1}([1,2]) =]-\infty, 0] \cup]0,1] =]-\infty, 1]$

2. f *n'est pas injective car :* $-3 \neq -2$ *mais* $f(-3) = f(-2) = 1$
f *n'est pas surjective car : d'après la question précédente* 0 *n'a pas d'antécédents*

II. *Soit l'application* $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *telle que :* $g(x) = \frac{9}{2x-1}$

1. *Montrons que* g *est bijective :*

— g *injective :*$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow \frac{9}{2x_1-1} = \frac{9}{2x_2-1}$
$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$
donc : g *injective.*

— g *est Surjective :* $\forall y \in \mathcal{R}^{\Lambda}$, $\exists x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ *tel que :* $y = g(x)$
$y = g(x) \Rightarrow y = \frac{9}{2x-1} \Rightarrow x = \frac{9+y}{2y}$
On doit montrer que : $\frac{9y}{2y} \neq \frac{1}{2}$
Par l'absurde : on suppose : $\frac{c}{9+y} 2y = \frac{1}{2} \Rightarrow 9 = 0$ *ce qui est impossible*
On déduit alors $\forall y \in \mathbb{R}^*$,$\exists x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, $y = g(x)$. *Donc* g *est Surjective .*
En déduit que g *est bijective.*

2. *Déterminons l'application réciproque* g^{-1}

$$g^{-1} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$$
$$y \longrightarrow x = g^{-1}(y) = \frac{9+y}{2y}$$

donc : $g^{-1}(x) = \frac{9+x}{2x}$

Corrigé exercice 5 *Soit* f *une application de* E *vers* F. *Soient* A *et* A' *deux partie de* E , *et soient* B *et* B' *deux partie de* F

1. *Montrons que :*

1.1 $A \subset f^{-1}(f(A))$ $\forall x \subset A$ *on a :*$f(x) \in f(A)$
alors : $x \in f^{-1}(f(A))$
car : $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$
d'où $A \subset f^{-1}(f(A))$.

1.4 $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
$\forall y \in f(A \cap A') \subset, \exists x \in A \cap A'$ *tel que :* $y = f(x)$
$$x \in A \cap A' \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \\ \quad et \\ x \in A' \Rightarrow f(x) \in f(A') \end{cases} \Rightarrow f(x) \in f(A) \cap f(A')$$
et comme $y = f(x)$ *donc :* $y \in f(A) \cap f(A')$
on déduit : $f(A \cap A') \subset f(A')$.

1.5 $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
(1.5.a) montrons que : $f^{-1}(B \cup B') \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

$\forall x \in f^{-1}(B \cup B') \Rightarrow f(x) \in B \cup B'$

$$alors : \left\{ \begin{array}{c} f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \\ ou \\ f(x) \in B' \Rightarrow x \in f^{-1}(B') \end{array} \right. \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

(1.5.b) De la même manière on démontre l'inclusion inverse.

*De **(1.5.a)** et **(1.5.b)** on déduit que :*

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

2. *Montrons que si f est injective alors on a égalité dans* (4) *:*

2.1 *D'après **(4)**, nous avons montré que :* $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

2.2 *Montrons que :* $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$

$$\forall y \in f(A) \cap f(A') \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \ \ tel\ que \ \ y = f(x) \\ et \\ y \in f(A') \Rightarrow \exists x' \in A' \ \ tel\ que \ \ y = f(x') \end{array} \right.$$

$y = f(x) = f(x')$ *et* f *est injective. On déduit que :* $x = x'$

d'où $x \in A \cap A' \Rightarrow f(x) \in f(A \cap A')$

donc : $y \in f(A \cap A')$

*De **(2.1)** et **(2.2)** on obtient :*

$$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Corrigé exercice 6 *On a :* $\forall (x,y);(x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)\Re\,(x',y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$

1. *Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence :*
   $\Re$ est une relation d'équivalence si et seulement si : elle est réflexive, symétrique, transitive.

   a) $\Re$ *réflexive :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\Re(x,y)$
   $(x,y)\Re(x,y) \Leftrightarrow x + y = x + y \Rightarrow 0 = 0$ *vraie*
   D'où $\Re$ est réflexive.

   b) $\Re$ *symétrique :* $\forall (x,y);(x',y') \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\Re(x',y') \Rightarrow (x',y')\Re(x,y')$
   On a : $(x,y)\Re(x',y') \Leftrightarrow x + y = x' + y' \Leftrightarrow x' + y' = x + y \Rightarrow (x',y')\Re(x,y)$
   D'où $\Re$ est symétrique.

   c) $\Re$ *transitive :* $\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{l} (x,y)\Re(x',y') \\ et \\ (x',y')\Re(x",y") \end{array} \right. \Rightarrow (x,y)\Re(x",y")$

   $$on\ a : \left\{ \begin{array}{l} (x,y)\Re(x',y') \\ et \\ (x',y')\Re(x",y") \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = x' + y' \\ et \\ x' + y' = x" + y" \end{array} \right. \Rightarrow x + y = x" + y" \Leftrightarrow (x,y)\Re(x",y")$$

   D'où $\Re$ est transitive.
   *Ainsi, de **(a)**, **(b)** et **(c)**, $\Re$ est une relation d'équivalence .*

2. *La classe d'équivalence du couple* $(0,0)$ *:*

$$\begin{aligned} cl\,\{(0,0)\} &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\Re(0,0)\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0 + 0 = 0\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\big\} \\ &= \{(x,-x)/x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Corrigé exercice 7 *On a :* $\forall (x,y);(x',y')\in\mathbb{R}^2,(x,y)T(x',y')\Leftrightarrow |x-x'|\leq y'-y$

1. *Montrons que* T *un relation d'ordre :*
   T *est une relation d'ordre si et seulement si :*T *réflexive , symétrique , transitive.*

   a) T *est réflexive :* $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)T(x,y)$.
   $(x,y)T(x,y)\Leftrightarrow |x-x|\leq y-y\Rightarrow 0\leq 0$ *(vraie)*
   d'où T *est réflexive.*

   b) T *antisymétrique :* $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2:\begin{cases}(x,y)T(x',y')\\ et\\ (x',y')T(x,y)\end{cases}\Rightarrow (x,y)=(x',y')$

   $$\begin{cases}(x,y)T(x',y')\Leftrightarrow |x-x'|\leq y'-y\\ \\ (x',y')T(x,y)\Leftrightarrow |x'-x|\leq y-y'\end{cases}\Rightarrow 2|x-x'|\leq 0\Rightarrow |x-x'|=0\Rightarrow x=x'$$

   de plus, $\begin{cases}y'-y\geq 0\\ et\\ y-y'\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'-y\geq 0\\ et\\ y'-y\leq 0\end{cases}\Rightarrow y'-y=0\Rightarrow y=y'$
   d'où $(x,y)=(x',y')$ *, alors* T *est antisymétrique.*

   c) T *est transitive :* $\forall (x,y),(x',y'),(x",y")\in\mathbb{R}^2:\begin{cases}(x,y)T(x',y')\\ et\\ (x',y')T(x",y")\end{cases}\Rightarrow (x,y)T(x",y")$

   $$\begin{cases}(x,y)T(x',y')\\ et\\ (x',y')T(x",y")\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-x'|\leq y'-y\\ et\\ |x'-x"|\leq y"-y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y'+y\leq x-x'\leq y'-y\\ et\\ -y"+y'\leq x'-x"\leq y"-y'\end{cases}$$

   donc : $y-y"\leq x-x"\leq y"-y\Rightarrow |x-x"|\leq y"-y\Rightarrow (x,y)T(x",y")$
   d'où T *est transitive.*
   Ainsi, de ***(a)****,* ***(b)*** *et* ***(c)****,* T *est une relation d'ordre.*

2. *L'ordre n'est pas totale (partiel) car :* $\exists (x,y)=(2,3)$ *et* $(x',y')=(4,3)$
   tel que : $\begin{cases}(x,y)\not{T}(x',y')\\ ou\\ (x',y')\not{T}(x,y)\end{cases}$

Corrigé exercice 8 $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,nSm\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{N}^*$ *tel que :* $n=km$

1. *Vérifions que :* $6S2$ *et* $5S1$.
   On a : $6S2\Leftrightarrow 6=k(2)$ *(vraie il suffit de prendre* $k=3$*)*
   On a : $5S1\Leftrightarrow S=k(1)$ *(vraie il suffit de prendre* $k=5$*)*

2. *Montrons que* S *est une relation d'ordre partiel :*

   a) ***Réflexive :*** $\forall n\in N^*,nSn$
   On a : $nsn\Leftrightarrow n=kn$ *(il suffit de prendre* $k=1$ *pour que* $n=kn$ *soit vraie)*

   b) ***Antisymétrique :*** $\forall n,m\in N^*:\begin{cases}nSm\\ et\\ mSn\end{cases}\Rightarrow n=m$

   On a : $\begin{cases}nSm\\ et\\ mSn\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists k\in N^*\ \ tel\ que:\ n=km\\ et\\ \exists k'\in N^*\ \ tel\ que:\ m=k'n\end{cases}\Rightarrow n=k(k'n)\Rightarrow n=kk'n$
   donc : $kk'=1$ *et comme* $k,k'\in N^*$*, on a :* $k=k'=1$ *d'où* $n=m$
   d'où S *Antisymétrique .*

   c) ***transitive :*** $\forall n,m,l\in N^*:\begin{cases}nSm\\ et\\ mSl\end{cases}\Rightarrow nSl$

$$On\ a : \begin{cases} nSm \\ et \\ mSl \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in N^* \quad tel\ que : \ n = km \\ et \\ \exists k' \in N^* \quad tel\ que : \ m = k'l \end{cases} \Rightarrow n = k(k'l) \Rightarrow n = kk'l$$

ainsi $\exists k" = kk' \in N^*$ *tel que :* $n = k"l \Rightarrow nSl$
d'où S *transitive.*
Alors, de ***(a),(b),(c)*** *la relation* ***S*** *est une relation d'ordre mais partiel car si on prend :* $n = 3$ *et* $m = 5$ *on a :* $n \not S m$