Recherche de chemins optimaux

Méthode de Ford-Fulkerson

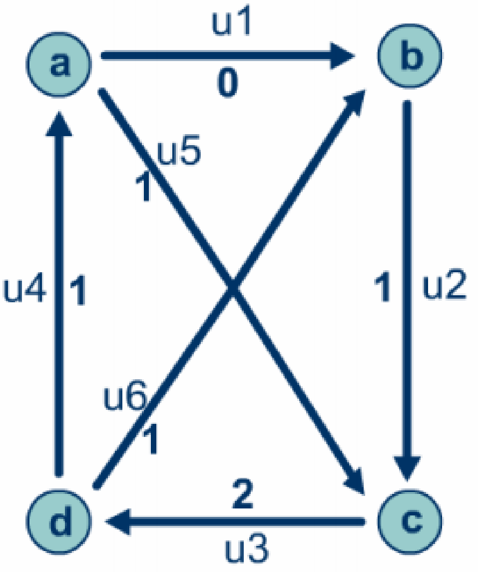
Définition d'un flot sur un graphe

- Soit G = (X, U) un graphe orienté. A chaque arc $u \in U$, on associe un nombre réel, noté ϕ_u , appelé **flux** sur l'arc u.

$\phi = \{ \phi_u / u \in U \}$ est un **flot** si et seulement si en chaque sommet $x \in X$, la somme des flux sur les arcs entrant est égal à la somme des flux sur les arcs sortant.

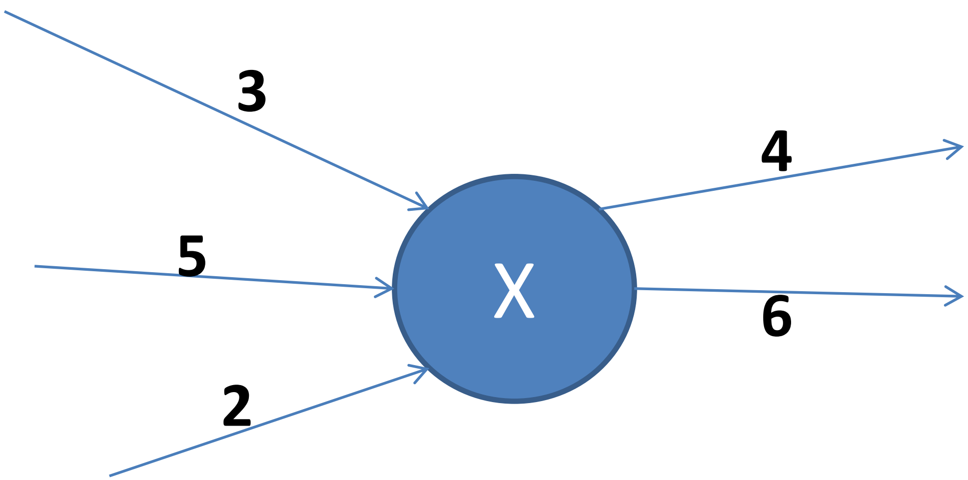
Définition d'un flot sur un graphe (2)

- Sur le graphe ci-dessous, les valeurs suivantes : 0 pour l'arc u1, 1 pour l'arc u2 etc. constituent un flot. On peut vérifier qu'en chaque sommet, la somme des flux entrants est égale à la somme des flux sortants.



Définition d'un flot sur un graphe (3)

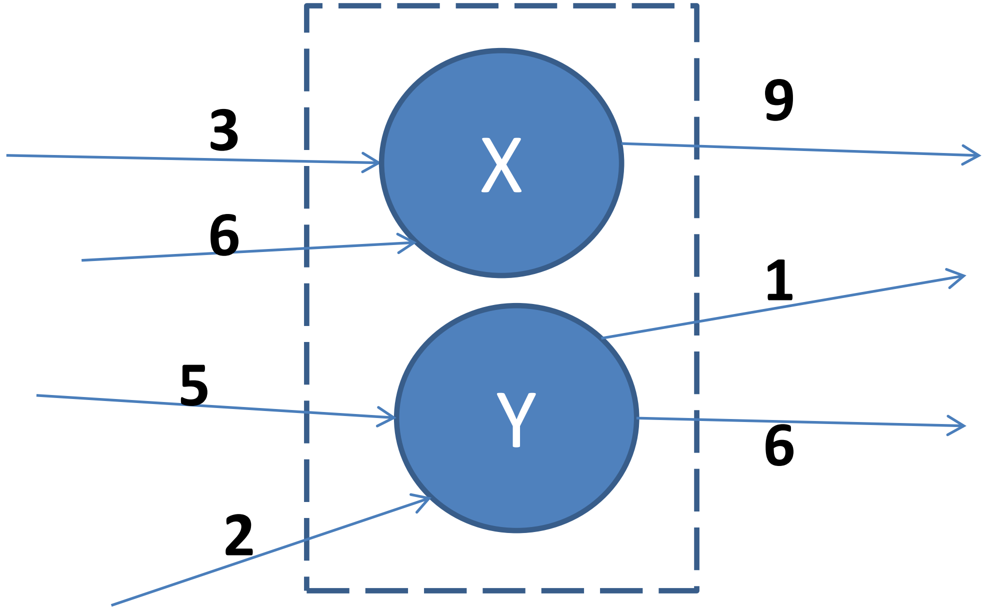
- La notion de conservation de flux au niveau d’un sommet est traduite par l’égalité de la somme de flux entrant avec la somme de flux sortant en un sommet du graphe.



$$\sum_{u \in \omega^+(x)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(x)} \varphi_u$$

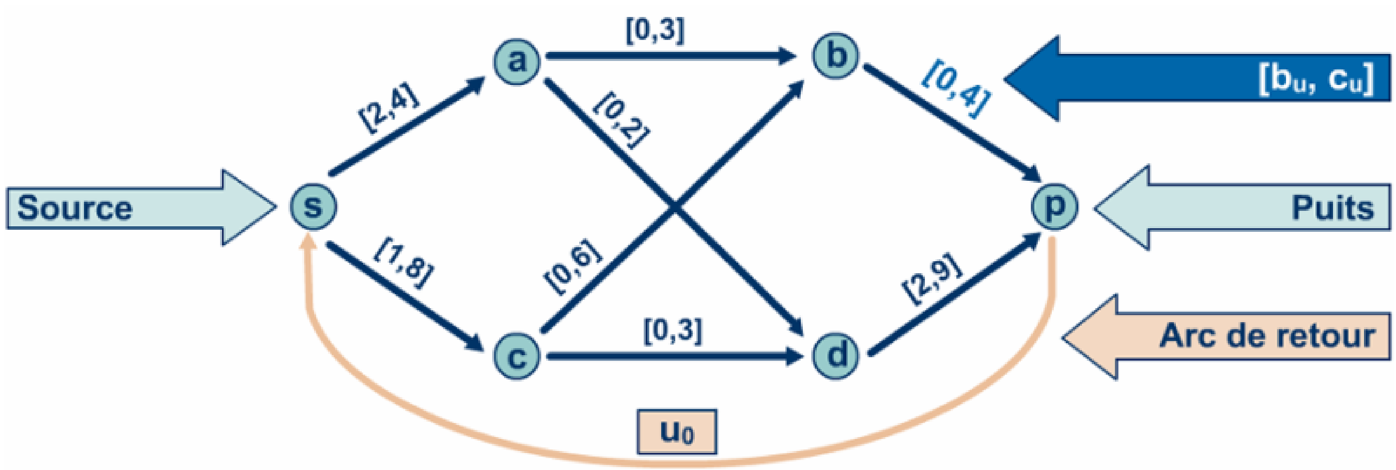
Définition d'un flot sur un graphe (4)

- La notion de conservation de flux au niveau d’un sous-ensemble ‘S’ de sommets du graphe G est l’égalité de la somme des flux entrants avec la somme des flux sortants



problème de flot maximal sur un réseau (1)

- Un graphe G = (X,U) est un **réseau** si :
  - il est **connexe**,
  - il possède deux sommets particuliers s et p appelés **source** et **puits,**
  - les arcs sont munis de **capacités inférieures** b_u et **supérieures** c_u avec $b_u \leq c_u$
  - l'arc (p, s) existe. Il est appelé **arc de retour** et noté u_0.



problème de flot maximal sur un réseau (2)

- A la place de source et puits, on dit aussi **entrée** et **sortie** du réseau.
- On dit qu'un flot ϕ sur G est **compatible avec les capacités** si : $\forall\ u \in U\ b_u \leq \phi_u \leq c_u$.

  Sur chaque arc, le **flux** est compris entre la capacité inférieure et supérieure.
- La **valeur** du **flot** sur un réseau est égale à la valeur du flux **ϕ0** sur l'arc de retour u_0.

problème de flot maximal sur un réseau (3)

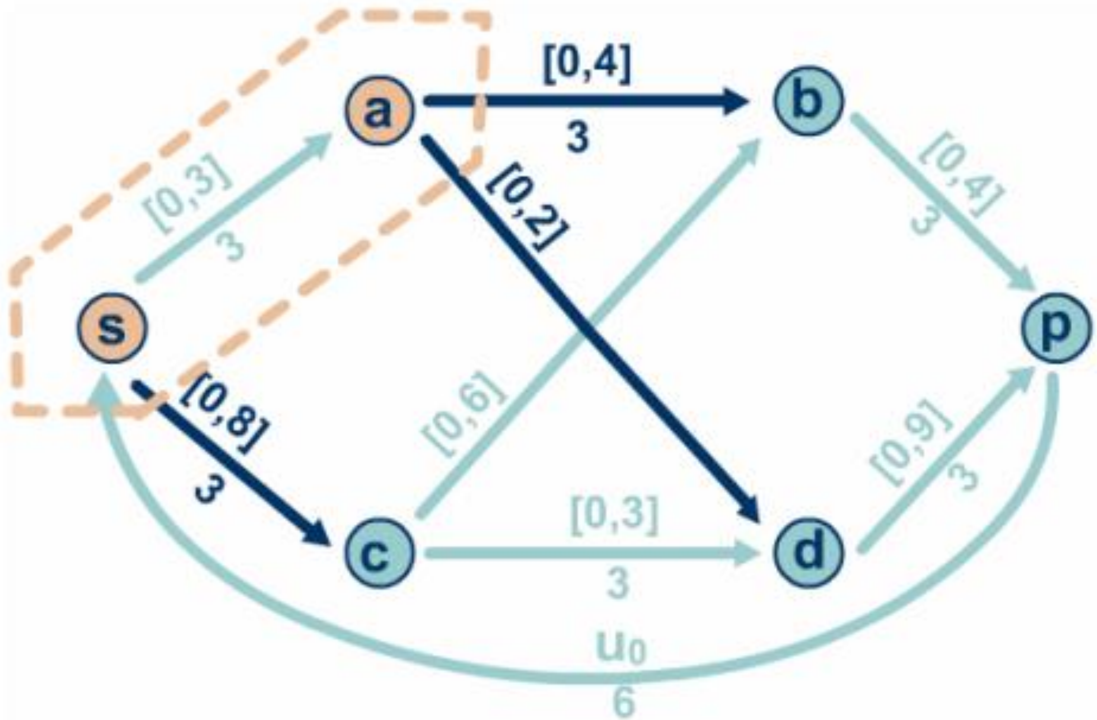
- Le **problème du flot maximal** est la détermination d'un **flot** sur G, **compatible** avec les capacités, et dont le flux ϕ_0 sur l'arc de retour u_0 est le plus grand possible.

Algorithme de Ford-Fulkerson (1)

- L'Algorithme Ford-Fulkerson **s'applique** sur les réseaux où les **capacités inférieures** sont **nulles**.
- **Définition des coupes**
  Soit S, un sous-ensemble de sommets, tel que $s \in S$ et $p \notin S$
  On dit que l'ensemble des arcs ω^+ (S)= {$u \in U$/origine de u dans S et extrémité hors de S} est une **coupe séparant s et p.**

$$C(S) = \sum_{u \in \omega+(S)} c_u$$ est la **capacité de la coupe** $\omega+$ (S)

Algorithme de Ford-Fulkerson (2)



S = {s, a}

$\omega^+(S)$= {(a, b), (a, d), (s, c)} est une coupe qui sépare s et p de capacité C(S) = 3+ 0 + 3 = 14

Algorithme de Ford-Fulkerson (3)

- **Définition du coupe minimal**

C’est l’ensemble minimal d’arcs dont la suppression déconnecte un sommet particulier d'un sommet donné t.

Soient ϕ* un flot compatible avec les capacités et S*⊂ X avec s∈S* et p∉ S* tels que la valeur du flot soit égale à la capacité de la coupe :

$$\varphi\ u0 = \sum_{u \in \omega+(S^*)} c_u$$

le flot ϕ* est maximal et la capacité de la coupe ω+(S*) est minimale.

Algorithme de Ford-Fulkerson (4)

- **Définition d'une chaîne améliorante relativement à un flot**
  une chaîne μ est une suite d'arcs qui ne sont pas nécessairement dans le même sens.
  On distingue les arcs dans le sens direct $u \in \mu^{+}$ (arc avant) et ceux de sens inverse ou rétrograde (arc arrière) $u \in \mu^{-}$.
  Soient un flot sur le réseau et μ une chaîne de la source s au puits p. La chaîne est **améliorante** si pour les arcs de sens direct le flux est inférieur strictement à la capacité supérieure et si pour les arcs de sens inverse le flux est strictement positif.
  La chaîne μ est améliorante si :

$$\boldsymbol{\forall\, u \in \mu^{+} \;\; \phi u < cu \text{ et } \forall\, u \in \mu^{-} \;\; \phi u > 0}$$

Algorithme de Ford-Fulkerson (5)

- **Augmentation de la valeur d'un flot à partir d'une chaîne améliorante**
- Soit μ une chaîne améliorante de s à p.
  Si on augmente le flux de 1 sur les arcs dans le sens direct et qu'on le diminue de -1 pour les arcs dans le sens rétrograde, on conserve un flot.

Algorithme de Ford-Fulkerson (6)

- Sur les arcs de sens direct on peut augmenter au maximum de la plus petite capacité résiduelle :
  $\varepsilon^{+} = \min (cu - \phi u)$ pour $u \in \mu^{+}$
- Sur les arcs rétrogrades on peut diminuer au maximum de la valeur du plus petit flux :
  $\varepsilon^{-} = \min (\phi u)$ pour $u \in \mu^{-}$
- Sur l'ensemble des arcs de la chaîne, on est limité par la plus petite de ces quantités :
  $\varepsilon = \min (\varepsilon^{+}, \varepsilon^{-})$
- On construit ainsi un nouveau flot compatible avec les capacités dont la valeur sur l'arc de retour a augmenté de ε .

Algorithme de Ford-Fulkerson (7)

- **Mise en évidence d’une chaîne augmentante par une procédure de marquage**
- La recherche d'une chaîne améliorante - s'il en existe une - se fait par une procédure de marquage des sommets. Les sommets seront marqués par le signe + ou le signe -.

Algorithme de Ford-Fulkerson (8)

- **Principe de la procédure de marquage**
  Au départ on connaît un flot ϕ sur le graphe, compatible avec les capacités.
  - Marquer s
  - Marquer "+" un sommet extrémité d'un arc dont l'origine est marquée et sur lequel le flux peut augmenter ($\phi u < cu$)
  - Marquer "–" un sommet origine d'un arc dont l'extrémité est marquée et sur lequel le flux peut diminuer ($\phi u > 0$)

Algorithme de Ford-Fulkerson (9)

- **Procédure de marquage**

  - Marquer s de "+"
    TANT QUE "il existe des sommets qui peuvent être marqués" ET que p est non marqué

    Sélectionner un sommet "marquable" et le marquer

    FINTANTQUE

Algorithme de Ford-Fulkerson (10)

- **Algorithme de Ford-Fulkerson**

Fin := FAUX
  Partir d'un flot initial compatible avec les capacités
  TANTQUE fin = FAUX

    Effectuer la procédure de marquage à partir du flot courant

    Si p est non marqué ALORS poser fin:= VRAI {le flot est maximal}
    SINON Modifier le flot à partir d'une chaîne améliorante

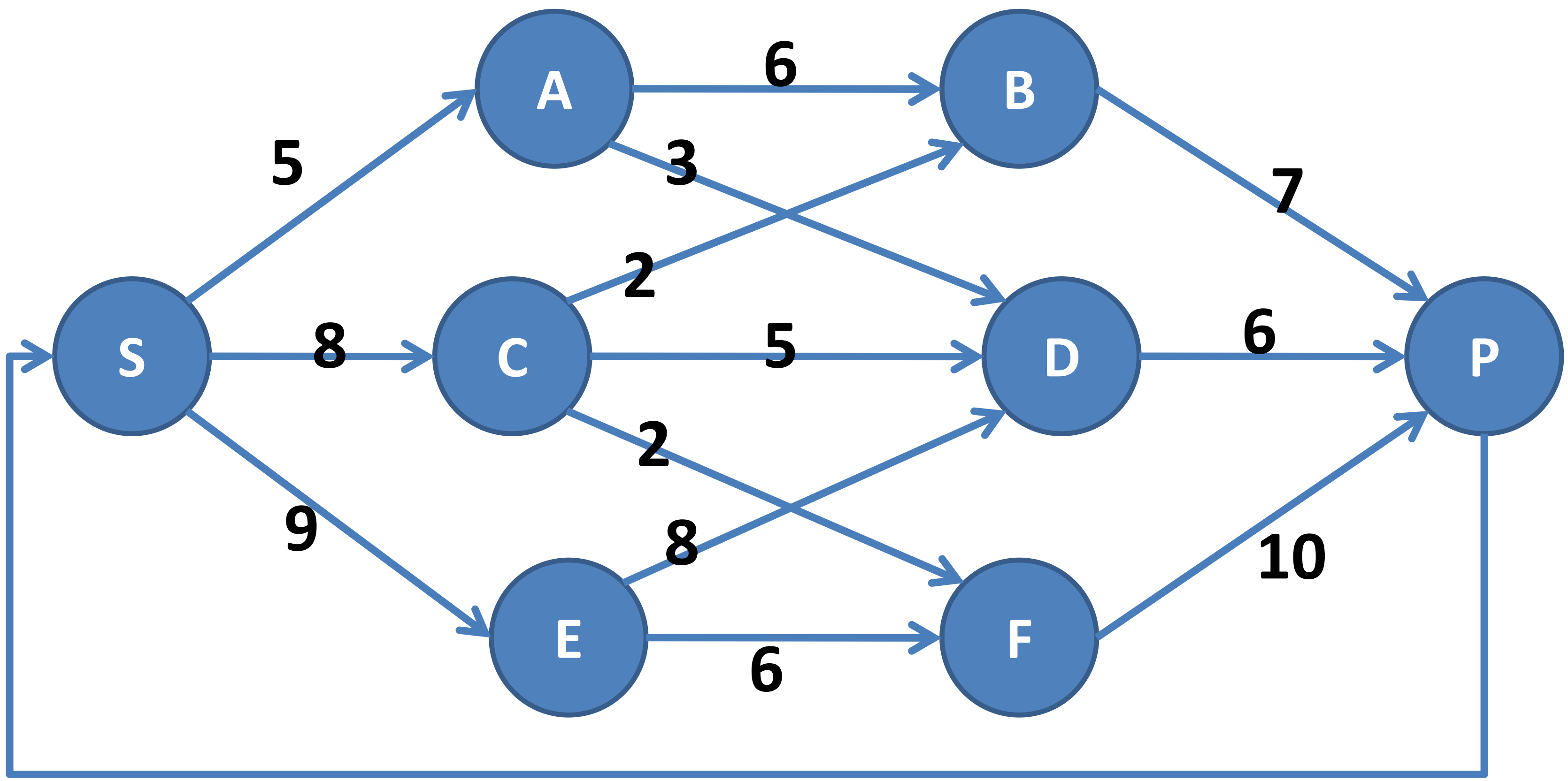
  FINTANTQUE

FIN

Algorithme de Ford-Fulkerson (11)

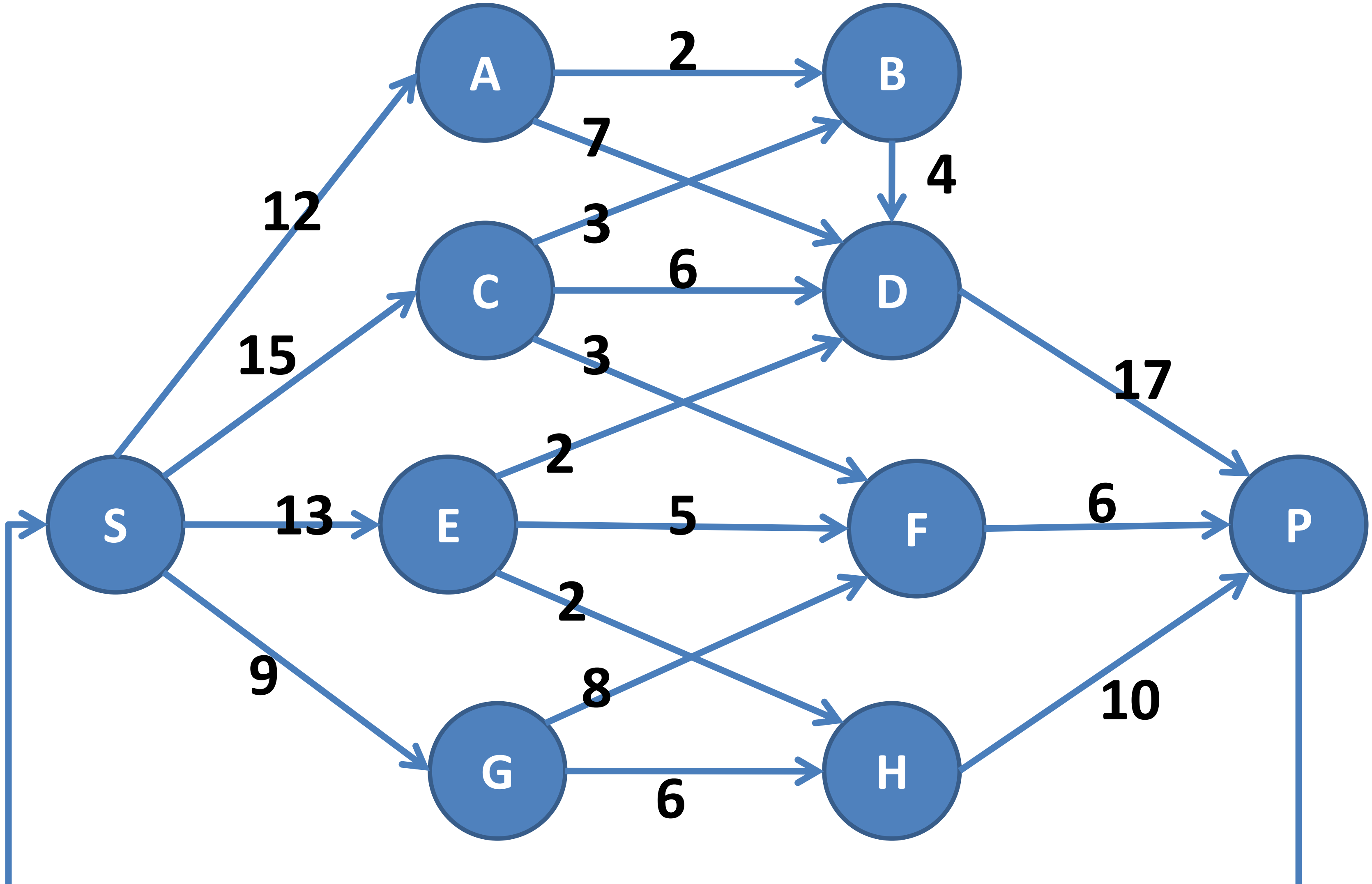
- **Exemple**

trouver le flot maximal et la coupe minimale du réseau ci-dessous:



Algorithme de Ford-Fulkerson (12)

- **Exercice** trouver le flot maximal et la coupe minimale du réseau ci-dessous:



Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (1)

- **Optimisation de l'utilisation de la bande passante (**Neto et al., 2015)

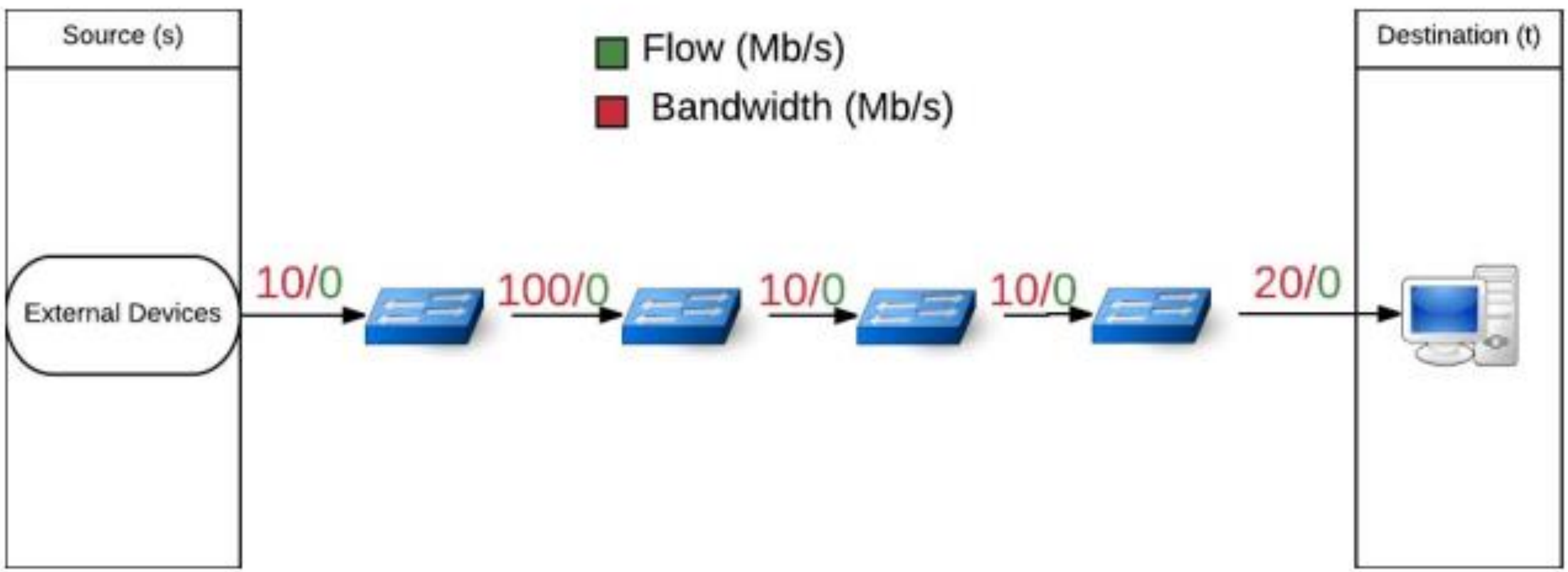


Figure 1. Network scenario representation.

Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (2)

- **Optimisation de l'utilisation de la bande passante (**Neto et al., 2015)

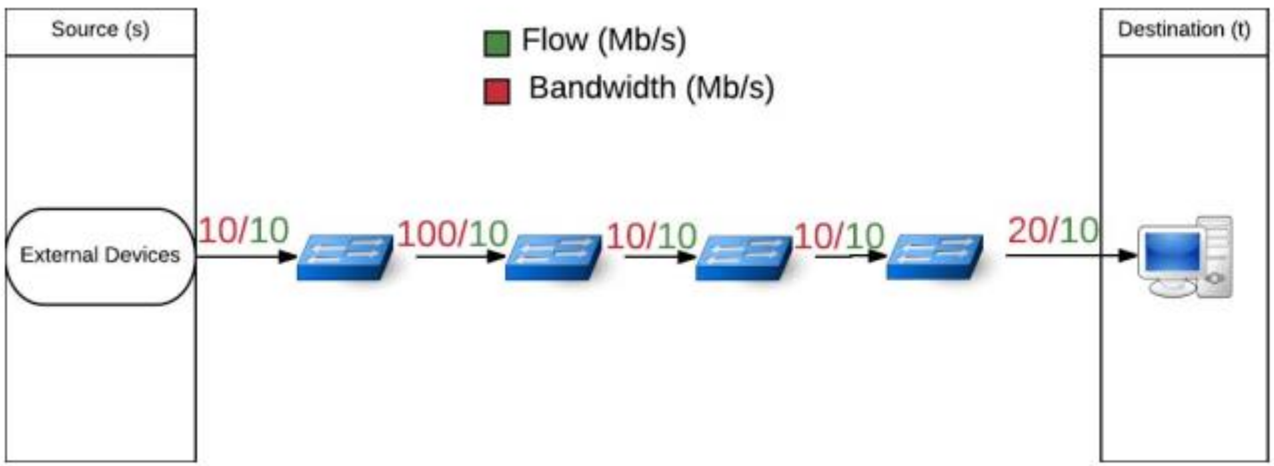


Figure 2. Maximum Flow for the network infrastructure of Figure 1.

Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (3)

- **Optimisation de l’utilisation de la bande passante (**Neto et al., 2015)

Scénario 1

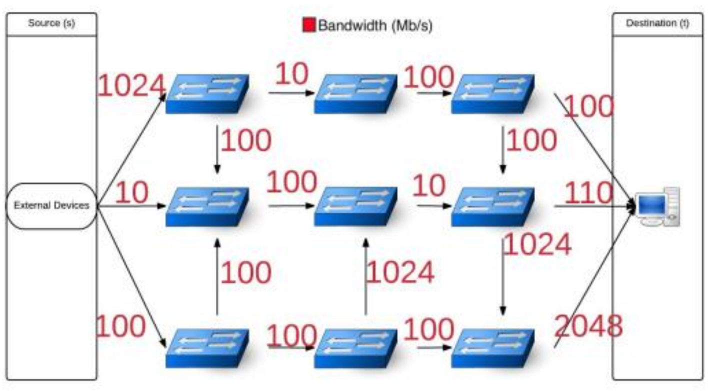
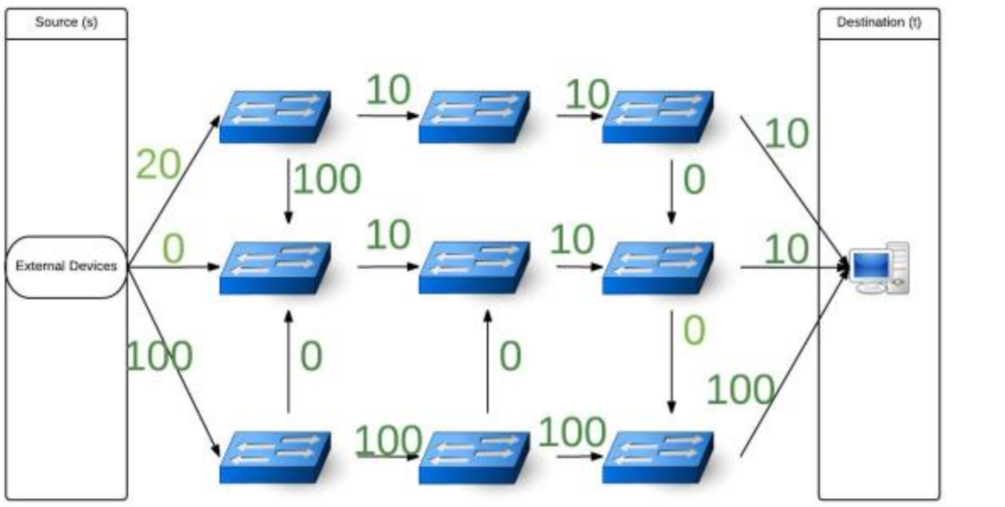


Figure 3. Network infrastructure and the correspondent bandwidth for each device.



gure 4. Maximum Flow for the network infrastructure of Figure 3.

Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (4)

- **Optimisation de l’utilisation de la bande passante (**Neto et al., 2015)

Scénario 2

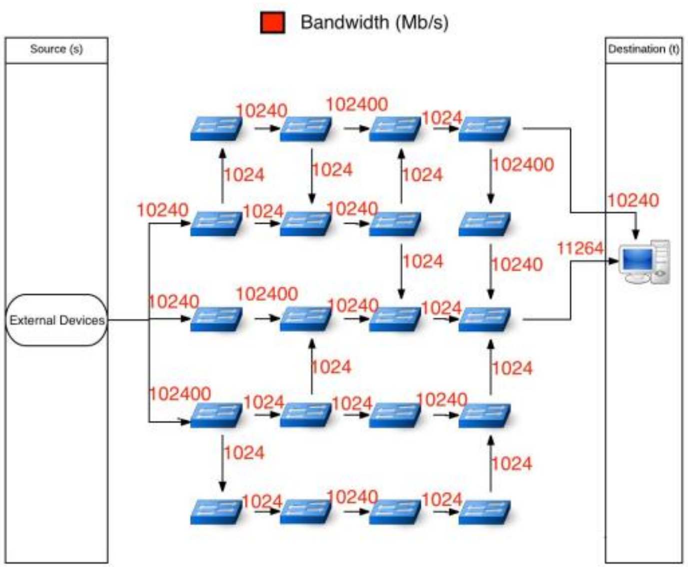


Figure 5. Network infrastructure and the correspondent bandwidth each device.

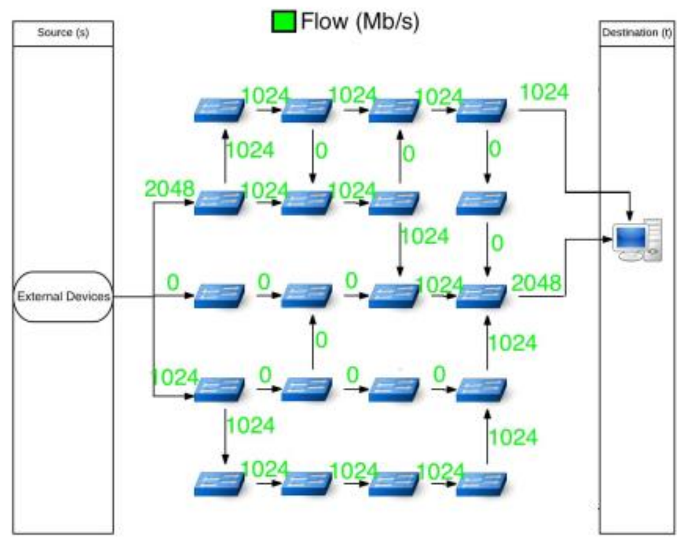


Figure 6. Maximum Flow for the network infrastructure present on Figure 5.

Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (5)

- **Op**

Résult

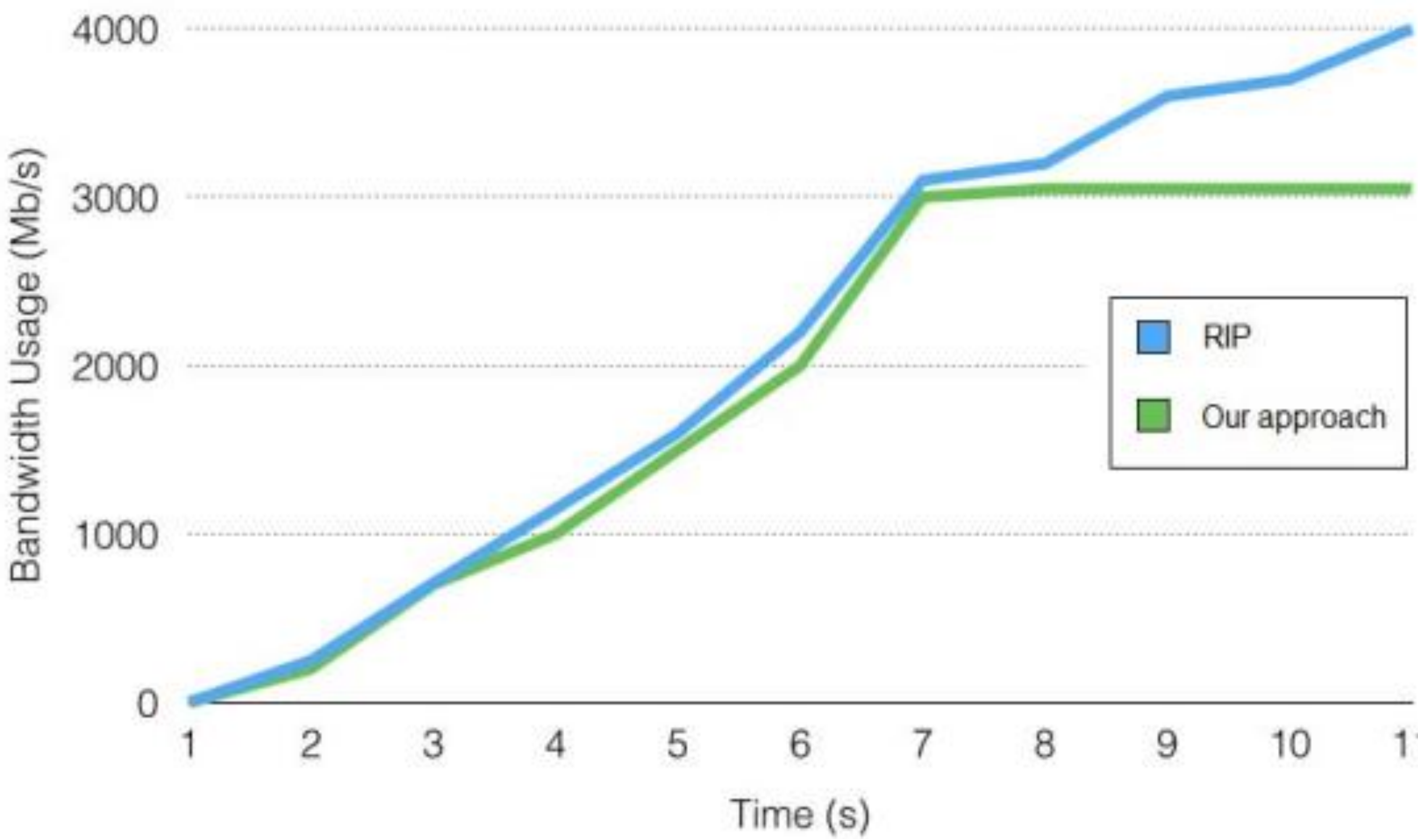


Figure 7. Source bandwidth usage (Mb/s) per Second (s) using RIP and our algorithm.

Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (6)

- **MFMP: Max Flow Multipath Routing Algorithm (**Mahlous et al., 2008)

problématique:

La plupart des routeurs sont basés sur le routage du **plus court** et **unique** chemin comme RIP v1, ce qui peut conduire à une distribution de **trafic déséquilibrée** en raison de la **congestion** du chemin le plus court qui est fréquemment utilisé.

Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (7)

problématique:

La redondance réseau est un processus par lequel des instances supplémentaires ou alternatives de périphériques réseau, d'équipements et de supports de communication sont installés dans l'infrastructure réseau. C'est une méthode pour assurer la disponibilité du réseau en cas de panne ou d'indisponibilité d'un périphérique réseau ou d'un chemin. Il fournit un moyen de basculement réseau.

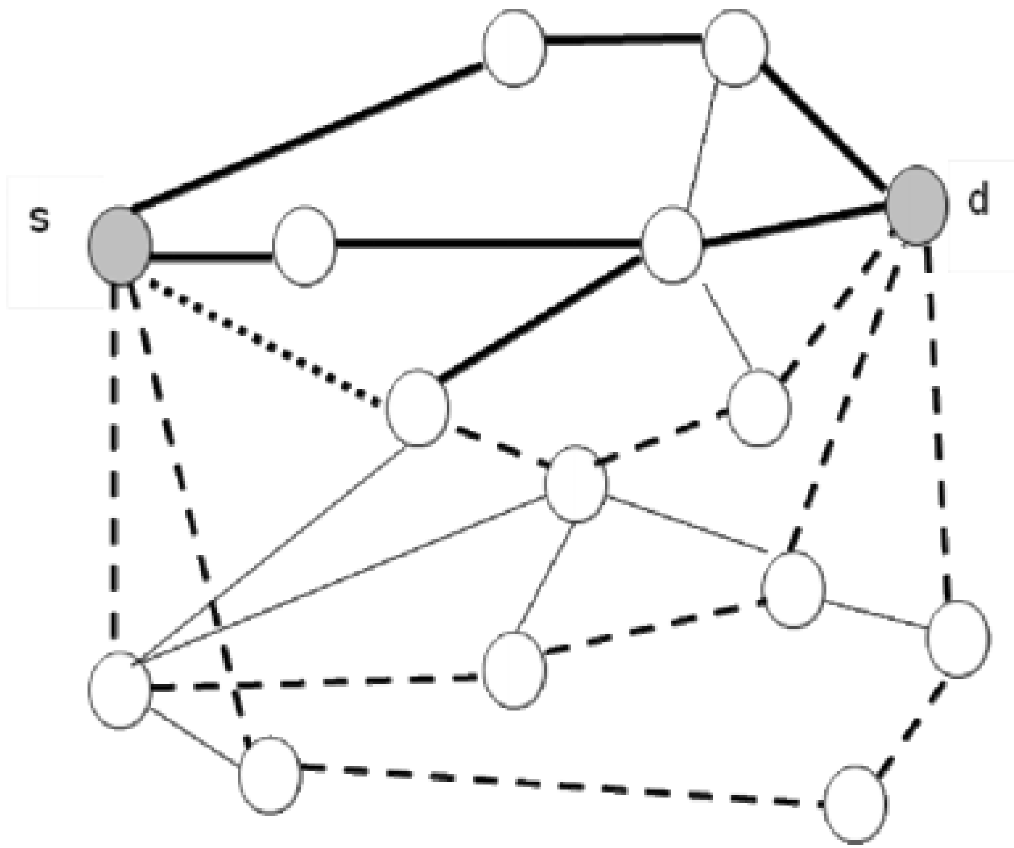
Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (8)

problématique:

Pour pallier le problème de **congestion** qui dépend du plus court chemin, un **routage multi-chemins** est l’alternative pour profiter de la **redondance** réseau, **répartir la charge**, améliorer la **fiabilité** de délivrance des paquets, augmenter la **sécurité** du réseau, et résoudre les problèmes de **QoS**.

Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (9)

résultats:



Application de l’algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (10)

Résultats (critères):

Packet delivery Ratio percentage : Le nombre de paquets reçus par la destination divisé par le nombre de paquets générés par la source.

Mean End to End delay: inclut tous les délais possibles des paquets à partir du moment où la source tente d'envoyer un paquet jusqu'au moment où le paquet arrive à la destination.

Packet loss percentage: le pourcentage du nombre des paquets perdus.

Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (11)

Résultats FMFP vs MSP (Multi shortest path) : trafique TCP (taille du paquet = 512 oct)

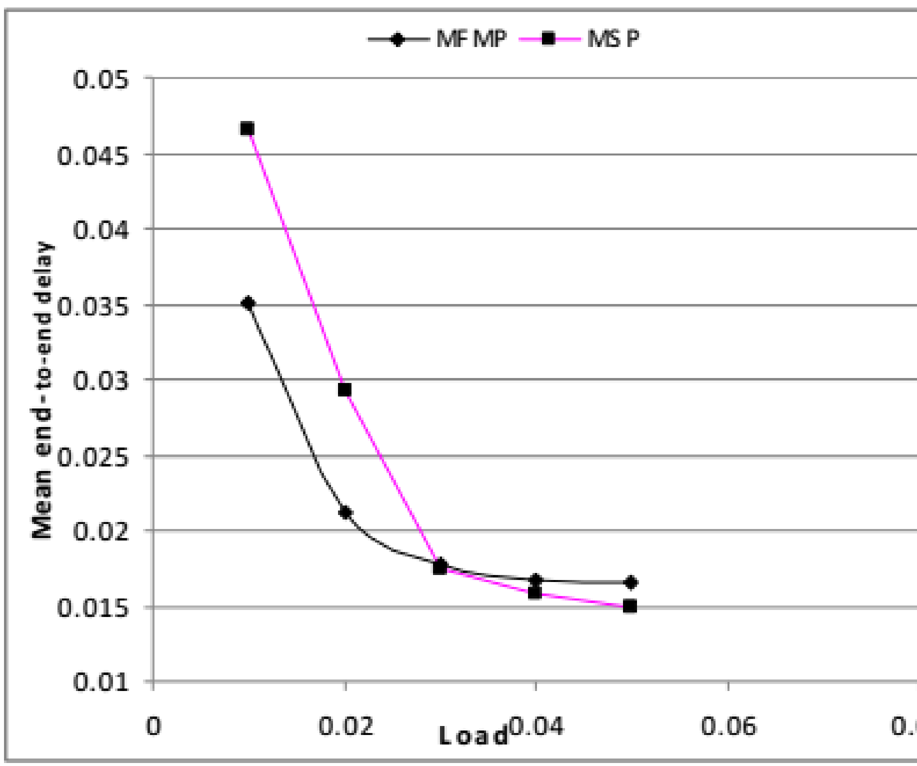


Figure 3. Mean End-to-End Delay (TCP)

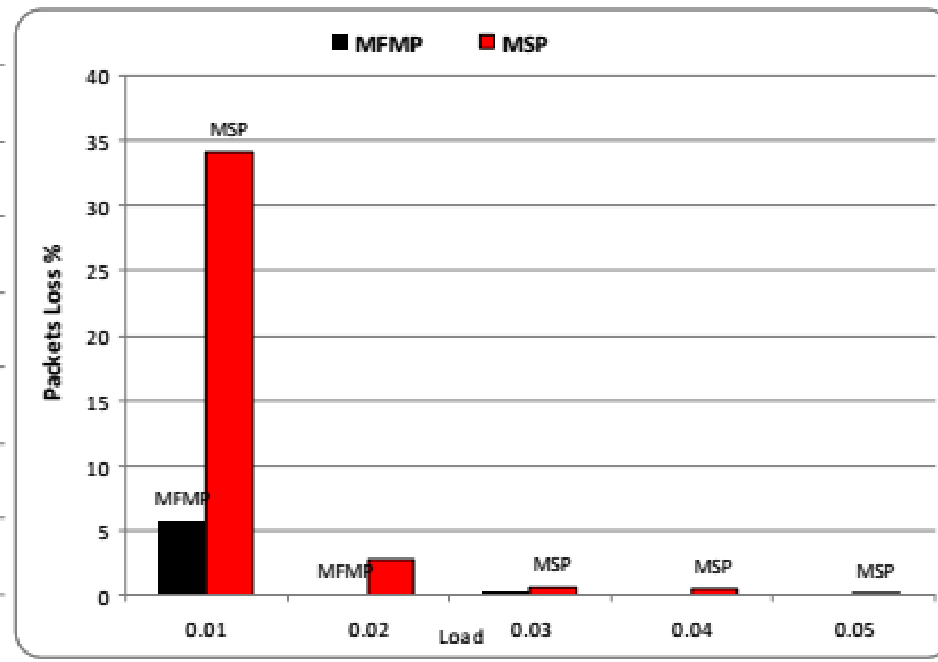


Figure 4. Packet (TCP) Loss %

Application de l'algorithme de Ford-Fulkerson aux réseaux (12)

Résultats FMFP vs MSP (Multi shortest path) : trafique TCP (taille du paquet = 512 oct)

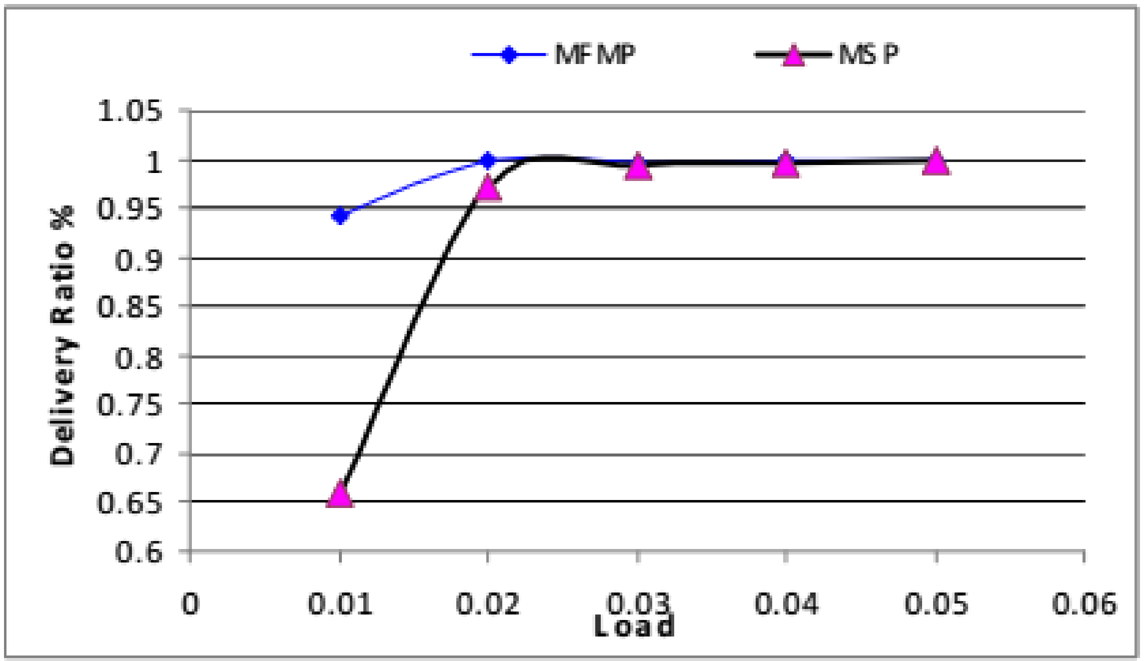


Figure 5. Delivery Ratio (TCP)

Sources

- 1- Combinatorial Optimization - Minimum Cuts - https://www.cc.gatech.edu/~vempala/acg/www/18.433/L9.pdf
- 2- LE PROBLEME DU FLOT MAXIMAL accessible en ligne «http://ressources.aunege.fr/nuxeo/site/esupversions/2b1c56b6-109d-488a-94a3-3ea525f8beef/ModAidDec/cours/l6/l6.pdf »
- Neto, E. P., & Callou, G. (2015, November). An Approach Based on Ford-Fulkerson Algorithm to Optimize Network Bandwidth Usage. In *Computing Systems Engineering (SBESC), 2015 Brazilian Symposium on* (pp. 76-79). IEEE.
- Mahlous, A. R., Fretwell, R. J., & Chaourar, B. (2008, September). Mfmp: Max flow multipath routing algorithm. In *Computer Modeling and Simulation, 2008. EMS'08. Second UKSIM European Symposium on* (pp. 482-487). IEEE.