

# Chapitre 2

## Processus stochastiques discrets

### 2.1 Position du problème

On s'intéresse dans ce chapitre aux outils de description des processus stochastiques discrets, échantillonnés de façon uniforme dans le temps. Dans ce cadre, on considère une séquence :

$$u(n), u(n-1), \dots, u(n-M) \quad (2.1)$$

comme une réalisation particulière de  $M+1$  échantillons d'un processus aléatoire, où  $n$  représente le temps discret. Bien sûr, en théorie, un processus stochastique n'est pas associé à une seule réalisation mais à un nombre infini de réalisations sur lesquelles on peut faire des calculs statistiques, pourvu que l'on connaisse la distribution de probabilité.

En pratique, on supposera fréquemment que le processus est stationnaire, au moins au sens large (à l'ordre 2). Les propriétés (et grandeurs) statistiques sont alors indépendantes de  $n$ .

On supposera aussi fréquemment que le processus est ergodique, ce qui permet d'approcher les moyennes statistiques par des moyennes temporelles.

### 2.2 Matrices d'auto-corrélation

Soit  $u(n)$  le terme général (réel ou complexe) d'une série temporelle stationnaire au second ordre. On note  $\mathbf{u}(n)$  le vecteur de taille  $M \times 1$  :

$$\mathbf{u}(n) = (u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1))^T \quad (2.2)$$

où  $^T$  représente la transposition.

#### 2.2.1 Matrice d'auto-corrélation

Si les valeurs de la série  $u(n)$  sont à valeurs complexes, on définit la matrice d'auto-corrélation comme :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}(n)^H] = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(M-1) \\ R_{uu}(-1) & R_{uu}(0) & & \vdots \\ \vdots & & & \\ R_{uu}(-M+1) & & & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

où  $*$  représente l'opérateur de conjugaison,  $H$  représente la transposée conjuguée,  $R_{uu}(k) = E[u(n)u^*(n-k)]$ . Cette matrice possède la symétrie hermitienne, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^H = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(M-1) \\ R_{uu}^*(1) & R_{uu}(0) & & \vdots \\ \vdots & & & \\ R_{uu}^*(M-1) & & & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Pour montrer la propriété de symétrie hermitienne, il suffit de montrer que  $R_{uu}(k) = R_{uu}^*(-k)$  :

$$\begin{aligned} R_{uu}(k) &= E[u(n)u^*(n-k)] \\ &= E[u^*(n)u(n-k)]^* \\ &= E[u(n-k)u^*(n)]^* \\ &= R_{uu}^*(-k). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans le cas de signaux réels, la matrice est définie par  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}(n)^T]$  qui possède la symétrie simple, c'est-à-dire  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^T$  :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}(n)^T] = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(M-1) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & & \vdots \\ \vdots & & & \\ R_{uu}(M-1) & & & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## 2.2.2 Propriétés de la matrice d'auto-corrélation

**Propriété 2.2.1** *La matrice d'auto-corrélation d'un processus stochastique discret stationnaire est une matrice de Toeplitz, c'est-à-dire dont les diagonales sont constituées d'éléments identiques.*

**Propriété 2.2.2** *La matrice d'auto-corrélation est hermitienne.*

Pour des signaux à valeurs complexes, on a donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} &= \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^H \\ R_{uu}(-k) &= R_{uu}^*(k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour des signaux à valeurs réelles, les relations précédentes deviennent simplement :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} &= \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^T \\ R_{uu}(-k) &= R_{uu}(k). \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Propriété 2.2.3** *La matrice d'auto-corrélation d'un processus stochastique discret stationnaire est toujours définie, non négative, et presque toujours définie positive.*

En effet, soit  $\mathbf{x}$  un vecteur quelconque de taille  $M \times 1$ , on note :

$$y = \mathbf{x}^H \mathbf{u}(n) = \mathbf{u}^T(n) \mathbf{x}^* \quad (2.9)$$

et

$$y^* = \mathbf{u}^H(n)\mathbf{x}. \quad (2.10)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E[yy^*] &= E[|y|^2] \\ &= E[\mathbf{x}^H \mathbf{u}(n) \mathbf{u}^H(n) \mathbf{x}] \\ &= \mathbf{x}^H E[\mathbf{u}(n) \mathbf{u}^H(n)] \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Puisque  $E[|y|^2] \geq 0$ , la forme hermitienne  $\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \mathbf{x} \geq 0$ , c'est-à-dire qu'elle est définie non négative.

De plus, si pour  $\mathbf{x} \neq 0$ , la forme satisfait  $\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} \mathbf{x} > 0$ , alors la matrice  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  est définie positive. Cette condition est généralement remplie, à moins qu'il n'y ait des dépendances linéaires entre les  $u(n), \dots, u(n - M + 1)$ .

**Propriété 2.2.4** Si on ordonne les composantes du vecteur  $\mathbf{u}(n)$  de façon inverse, c'est-à-dire si on note  $\mathbf{u}^B(n) = (u(n - M + 1), \dots, u(n - 1), u(n))^T$ , la matrice d'auto-corrélation de  $\mathbf{u}^B$  vérifie  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}^B \mathbf{u}^B} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^T$ .

En effet,  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}^B \mathbf{u}^B}$  s'écrit par définition :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}^B \mathbf{u}^B} = E[\mathbf{u}^B(n) \mathbf{u}^B(n)^H] = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}^*(1) & \dots & R_{uu}^*(M-1) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & & \vdots \\ \vdots & & & \\ R_{uu}(M-1) & & & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

d'où  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}^B \mathbf{u}^B} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^T$ .

Dans le cas de signaux réels, compte tenu de la symétrie de  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ , on a simplement  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}^B \mathbf{u}^B} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$

**Propriété 2.2.5** Les matrices d'auto-corrélation de  $\mathbf{u}(n)$  de dimensions  $M$  et  $M + 1$ , notées respectivement  $\mathbf{R}_M$  et  $\mathbf{R}_{M+1}$  (en omettant l'indice  $\mathbf{u}\mathbf{u}$  pour simplifier l'écriture) sont liées par la relation :

$$\mathbf{R}_{M+1} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & \vdots & \mathbf{r}^H \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{r} & \vdots & \mathbf{R}_M \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

ou bien encore :

$$\mathbf{R}_{M+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_M & \vdots & \mathbf{r}^{B*} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \mathbf{r}^{BT} & \vdots & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

avec  $\mathbf{r} = E[\mathbf{u}(n) \mathbf{u}^*(n+1)]$ ,  $\mathbf{r}^H = (R_{uu}(1) R_{uu}(2) \dots R_{uu}(M))$  et  $\mathbf{r}^{BT} = (R_{uu}(-M) R_{uu}(-M+1) \dots R_{uu}(-1))$ .

## 2.3 Modèles stochastiques

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à trois types de modèles de filtres :

- des filtres auto-régressifs (AR),
- des filtres à moyenne mobile (MA, pour *moving average*),
- des filtres ARMA.

### 2.3.1 Modèles auto-régressifs (AR)

#### Définitions

Un signal  $\{u(n)\}$  est la réalisation d'un processus auto-régressif d'ordre  $M$  si  $u(n)$  s'écrit :

$$u(n) = \sum_{k=1}^M w_k u(n-k) + v(n) \quad (2.15)$$

où les  $w_k, k = 1, \dots, M$  sont les coefficients du modèle et  $v(n)$  est un bruit blanc.

On peut aussi écrire :

$$u(n) - \sum_{k=1}^M w_k u(n-k) = v(n) \quad (2.16)$$

ou bien, en posant  $a_0 = 1$  et  $a_k = -w_k, k = 1, \dots, M$  :

$$\sum_{k=0}^M a_k u(n-k) = v(n). \quad (2.17)$$

Enfin, en utilisant l'opérateur de retard  $z^{-1}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(n) &= \sum_{k=1}^M w_k z^{-k} u(n) + v(n) \\ v(n) &= u(n) [1 - \sum_k w_k z^{-k}] \end{aligned} \quad (2.18)$$

soit en utilisant les notations  $a_k$  :

$$\begin{aligned} u(n) [1 - \sum_k w_k z^{-k}] &= v(n) \\ H_A(z) u(n) &= v(n) \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec  $H_A(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$ .

Cette équation donne la relation entre un échantillon  $v(n)$  et  $u(n)$ . Pour les séquences  $\{v(n)\}$  et  $\{u(n)\}$ , en notant :

$$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) z^{-n} \text{ et } V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) z^{-n}, \quad (2.20)$$

on a :

$$H_A(z) U(z) = V(z). \quad (2.21)$$

On peut interpréter ce résultat de deux façons :

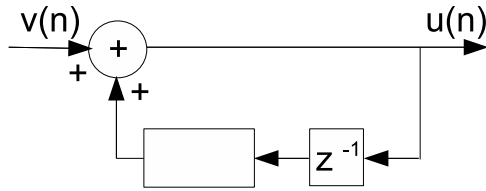


FIGURE 2.1 – Filtre auto-régressif (AR)

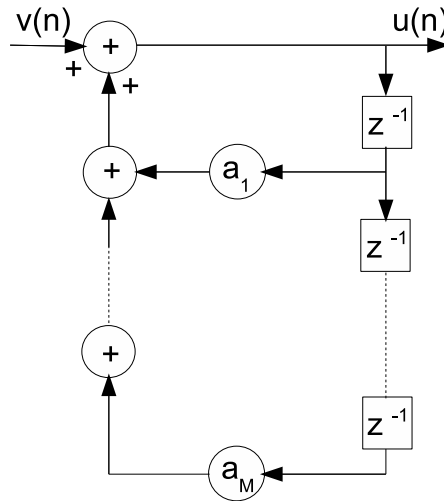


FIGURE 2.2 – Filtre auto-régressif (AR) d'ordre  $M$

1. Etant donné le bruit blanc  $\{v(n)\}$ , on peut générer le signal auto-régressif  $\{u(n)\}$  par la relation :

$$U(z) = V(z)/H_A(z) = H_G(z)V(z) \quad (2.22)$$

où  $H(z)$ , inverse du filtre RIF  $H_A(z)$ , est donc un filtre “générateur” à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR en Anglais) ;

2. Etant donné le processus auto-régressif  $\{u(n)\}$ , on peut utiliser le filtre  $H_A(z)$  pour produire un bruit blanc  $\{v(n)\}$  :  $H_A(z)$  est alors un filtre “analyseur” à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR en Anglais),

Un filtre AR peut être représenté globalement par le schéma de la figure 2.1 ; plus précisément pour un filtre AR d'ordre  $M$ , on a la structure de la figure 2.2.

### Zéros, pôles et stabilité

Le filtre  $H(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$  est un filtre tout-zéro (*all-zero filter*), car il ne possède que des zéros (exactement  $M - 1$ ), et il est complètement défini à partir de la position de ses zéros. Ce filtre est implicitement stable, c'est-à-dire que la réponse à une entrée d'énergie finie est à énergie finie.

Au contraire, le filtre  $H_G(z) = 1/H_A(z)$  est un filtre tout-pôle (*all-pole filter*). Les pôles de  $H_G(z)$  sont bien évidemment les zéros de  $H_A(z)$ . Ce filtre est stable si et seulement si tous les pôles de  $H_G(z)$  sont situés à l'intérieur du cercle unité dans le plan  $z$ .

### 2.3.2 Modèle MA

Le filtre générateur d'un signal MA,  $\{u(n)\}$  est un filtre tout-zéro attaqué par un bruit blanc. Le signal à l'instant discret  $n$  vaut alors :

$$u(n) = v(n) + b_1v(n-1) + \dots + b_Kv(n-K) = \sum_{k=0}^K b_kv(n-k), \quad (2.23)$$

où  $v(n)$  est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma_v^2$  et où les  $b_k$  sont les coefficients du filtre. On peut aussi écrire avec les mêmes notations que précédemment :

$$U(z) = H_{MA}(z)V(z). \quad (2.24)$$

De façon inverse, on peut chercher à blanchir un signal MA  $u(n)$  selon la relation :

$$V(z) = \frac{1}{H_{MA}}U(z) = H_B(z)U(z), \quad (2.25)$$

où le filtre  $H_B(z)$  est un filtre tout-pôle.

### 2.3.3 Modèle ARMA

C'est la combinaison des parties AR et MA, vues précédemment. Un processus ARMA  $\{u(n)\}$  satisfait donc l'équation :

$$u(n) + a_1u(n-1) + \dots + a_Mu(n-M) = v(n) + b_1v(n-1) + \dots + b_Kv(n-K), \quad (2.26)$$

où les  $a_m$  et les  $b_k$  sont les coefficients des parties AR et MA, respectivement, et où  $v(n)$  est un bruit. En factorisant dans  $z$ , on a :

$$H_{AR}(z)U(z) = H_{MA}(z)V(z), \quad (2.27)$$

d'où :

$$\frac{U(z)}{V(z)} = \frac{H_{MA}(z)}{H_{AR}(z)}. \quad (2.28)$$

Dans le filtre ARMA, les zéros sont donnés par  $H_{MA}(z)$  et les pôles par  $H_{AR}(z)$ .

### 2.3.4 Discussion

Le modèle AR présente un avantage calculatoire sur les modèles MA et ARMA dans la mesure où les coefficients AR sont solutions d'un système linéaire d'équations appelé équations de Yule-Walker. Au contraire, le calcul des coefficients MA et ARMA requiert la résolution d'équations non linéaires. Cependant, le modèle ARMA est plus riche que le modèle AR et peut s'avérer indispensable dans de nombreuses situations.

## 2.4 Caractérisation d'un modèle AR

Un modèle (ou un processus) AR est complètement caractérisé par :

- la variance du bruit blanc  $v(n)$  qui excite le filtre, notée  $\sigma_v^2$ ,
- les coefficients AR :  $a_1, a_2, \dots, a_M$  (rappelons que  $a_0 = 1$ ).

On a alors l'équation :

$$u(n) \left( 1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \right) = v(n) \quad (2.29)$$

ou bien sous la forme développée :

$$u(n) + a_1 u(n-1) + \dots + a_M u(n-M) = v(n), \quad (2.30)$$

où  $v(n)$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_v^2$ .

### 2.4.1 Equations de Yule-Walker

Multiplions l'équation précédente par  $u(n-p)$ ,  $p > 0$ , et calculons l'espérance :

$$E \left[ \sum_{k=0}^M a_k u(n-k) u(n-p) \right] = E[v(n) u(n-p)], \quad p = 1, \dots, M. \quad (2.31)$$

On voit apparaître les auto-corrélations de  $u$ , et les inter-corrélations entre  $v$  et  $u$ . Puisque, pour  $p > 0$ ,  $u(n-p)$  ne dépend pas de  $v(n)$ , les intercorrélations sont nulles sauf en  $p = 0$ . On a donc :

$$E[v(n) u(n-p)] = \begin{cases} \sigma_v^2 & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

En écrivant l'équation pour  $p = 1, \dots, M$ , on obtient le système de  $M$  équations :

$$\sum_{k=0}^M a_k E[u(n-k) u(n-p)] = 0 \quad p = 1, 2, \dots, M \quad (2.33)$$

En posant  $w_k = -a_k$ , on peut mettre cette équation sous la forme :

$$\sum_{k=1}^M w_k E[u(n-k) u(n-p)] = E[u(n) u(n-p)] \quad p = 1, 2, \dots, M. \quad (2.34)$$

En posant maintenant :

$$\begin{aligned} E[u(n-k) u(n-p)] &= R_{uu}(p-k) = R(p-k) \\ E[u(n) u(n-p)] &= R_{uu}(p) = R(p) \end{aligned} \quad (2.35)$$

le système d'équations peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(M-1) \\ R(1) & R(0) & & R(M-2) \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ R(M-1) & R(M-2) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(M) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

que l'on peut mettre sous la forme matricielle :

$$\mathbf{R} \mathbf{w} = \mathbf{r}, \quad (2.37)$$

en posant  $\mathbf{w} = (w_1 \dots w_M)^T$ , et  $\mathbf{r} = (R(1) \dots R(M))^T$ . Cette équation porte le nom d'équation de Yule-Walker.

## 2.4.2 Résolution des équations de Yule-Walker (YW)

**Calcul des coefficients  $w_k$ .** Si la matrice  $\mathbf{R}$  est régulière, on calcule simplement :

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}. \quad (2.38)$$

On remarque que l'équation de YW requiert la connaissance de  $R(0), \dots, R(M)$ , c'est-à-dire de  $M + 1$  termes d'auto-corrélation. L'équation (2.38) permet de calculer les  $M$  coefficients  $w_1, \dots, w_M$ . Il reste à calculer la variance  $\sigma_v^2$ .

**Calcul de la variance.** Pour  $p = 0$ , en tenant compte de l'équation du modèle AR (2.30), l'équation (2.31) devient :

$$E\left[\sum_{k=0}^M a_k u(n-k)u(n)\right] = E[v(n)u(n)] = \sigma_v^2. \quad (2.39)$$

En utilisant la propriété de linéarité de l'espérance, on arrive à :

$$\sum_{k=0}^M a_k E[u(n-k)u(n)] = \sigma_v^2, \quad (2.40)$$

soit, avec les notations  $R(k) = E[u(n-k)u(n)]$  :

$$\sum_{k=0}^M a_k R(k) = \sigma_v^2. \quad (2.41)$$

Cette  $(M + 1)$ -ème équation permet donc de calculer la variance, à partir de  $R(0), \dots, R(M)$  et des coefficients  $a_1, \dots, a_M$ . Le filtre AR est ainsi complètement spécifié.

## 2.5 Processus AR d'ordre 2

Soit le processus AR d'ordre 2 défini par :

$$u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) = v(n), \quad (2.42)$$

où  $v(n)$  est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma_v^2$ .

### 2.5.1 Stationnarité asymptotique

*Ce calcul a été fait en cours de traitement numérique du signal en 3i4.*

Le processus AR est stationnaire asymptotiquement si les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0 \quad (2.43)$$

sont situées à l'intérieur du cercle unité.



Réolvons l'équation polynomiale :

$$z^2 + a_1 z^1 + a_2 = 0 \quad (2.44)$$

Le discriminant vaut  $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ , et l'on a les deux racines :

$$\rho_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}. \quad (2.45)$$

On doit donc vérifier :

$$|\rho_1| < 1 \text{ et } |\rho_2| < 1. \quad (2.46)$$

Si  $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$ , on a deux racines complexes conjuguées, telles que :

$$|\rho_1|^2 = |\rho_2|^2 = \frac{a_1^2 - (a_1^2 - 4a_2)}{4} = a_2, \quad (2.47)$$

donc la condition pour la stationarité asymptotique est  $a_2 < 1$ .

Si  $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$ , on a deux racines réelles. Si  $a_1 > 0$ , on a  $|\rho_1| < |\rho_2|$ . La condition de stationarité asymptotique est alors :

$$|\rho_2| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right| < 1 \quad (2.48)$$

La résolution de la dernière inégalité donne :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} &< 1 \\ \sqrt{a_1^2 - 4a_2} &< 2 - a_1 \\ a_1^2 - 4a_2 &< 4 - 4a_1 + a_1^2 \\ a_1 - 1 &< a_2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si  $a_1 < 0$ , on a  $\rho_1 > \rho_2$  et  $\rho_1 > 0$ . La condition de stationarité asymptotique,  $|\rho_1| < 1$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} &< 1 \\ \sqrt{a_1^2 - 4a_2} &< 1 + a_1 \\ a_1^2 - 4a_2 &< 4 + 4a_1 + a_1^2 \\ -a_1 - 1 &< a_2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

On peut résumer les trois conditions par le schéma de la figure 2.3. Dans cette figure, la limite entre les régions correspondant aux racines réelles et complexes est la parabole d'équation  $a_1^2 - 4a_2 = 0$ , la région "complexe" étant située au-dessus.

## 2.5.2 Fonction d'auto-corrélation

Soit l'équation du modèle (2.42) :  $u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) = v(n)$ . En multipliant par  $u(n-m)$ ,  $m > 0$  et en prenant l'espérance, on obtient :

$$R(m) + a_1 R(m-1) + a_2 R(m-2) = 0. \quad (2.51)$$

Pour  $m = 0$ , on a simplement :

$$R(0) + a_1 R(-1) + a_2 R(-2) = \sigma_v^2. \quad (2.52)$$

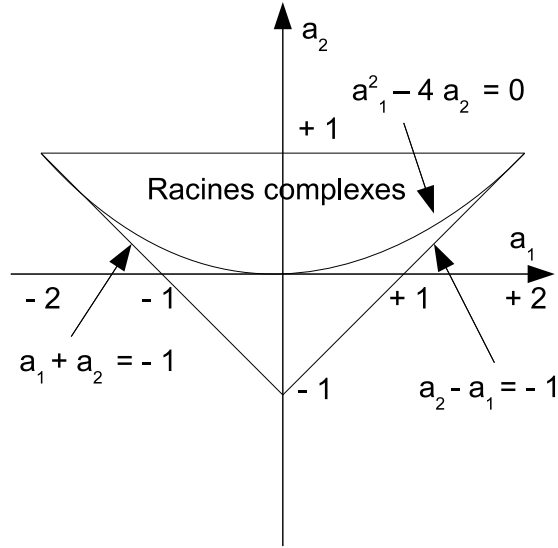


FIGURE 2.3 – Conditions de stationarité d'une filtre auto-régressif (AR) d'ordre 2

Les équations de Yule-Walker s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

avec  $w_k = -a_k$ .

On en déduit la solution :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{R(0)^2 - R(1)^2} \begin{pmatrix} R(0) & -R(1) \\ -R(1) & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{R(1)(R(0) - R(2))}{R(0)^2 - R(1)^2} \\ w_2 = \frac{R(2)R(0) - R(1)^2}{R(0)^2 - R(1)^2} \end{cases} \quad (2.55)$$

A partir des équations de YW, on peut aussi exprimer  $R(1)$  et  $R(2)$  en fonction de  $a_1 = -w_1$ ,  $a_2 = -w_2$  et de  $R(0) = \sigma_u^2$  :

$$\begin{aligned} R(1) &= -R(0)a_1 - R(1)a_2 \\ R(1) &= -\sigma_u^2 a_1 - R(1)a_2 \\ R(1)(1 - a_1) &= -a_1 \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

d'où :

$$R(1) = \frac{-a_1}{1 + a_2} \sigma_u^2. \quad (2.57)$$

On peut maintenant calculer  $R(2)$  de façon similaire :

$$\begin{aligned} R(2) &= -R(1)a_1 - R(0)a_2 \\ R(2) &= -R(1)a_1 - \sigma_u^2 a_2 \\ R(2)(1 - a_1) &= \frac{a_1^2}{1 + a_2} \sigma_u^2 - a_2 \sigma_u^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

d'où :

$$R(2) = \left( \frac{a_1^2}{1+a_2} - a_2 \right) \sigma_u^2. \quad (2.59)$$

Enfin, on termine en calculant la variance du bruit  $\sigma_v^2$ , en prenant l'équation (2.52) :  $R(0) + a_1R(-1) + a_2R(-2) = \sigma_v^2$ , obtenue pour  $m = 0$ .

$$\begin{aligned} R(0) + a_1R(-1) + a_2R(-2) &= \sigma_v^2 \\ \sigma_u^2 + a_1R(1) + a_2R(2) &= \sigma_v^2 \\ \sigma_u^2 \left( 1 - \frac{a_1^2}{1+a_2} + \frac{a_1a_2}{1+a_2} - a_2^2 \right) &= \sigma_v^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Après des calculs simples, on arrive à :

$$\sigma_u^2 = \left( \frac{1+a_2}{1-a_2} \right) \frac{\sigma_v^2}{(1+a_2)^2 - a_1^2} \quad (2.61)$$

## 2.6 Sélection de l'ordre du modèle

Dans les paragraphes précédents, l'ordre du modèle AR a été fixé à  $M$  (et à  $M = 2$  dans le paragraphe 2.5). En général, l'ordre n'est pas connu et on pourrait être tenté d'augmenter l'ordre du filtre pour améliorer la précision. En réalité, il y a un compromis entre l'ordre du filtre (complexité) et la qualité de l'estimation (variance du terme  $\sigma_v^2$ ).

Ce problème a été beaucoup étudié au cours des 40 dernières années. Dans ce paragraphe, on présente simplement les principes des critères AIC et BIC d'Akaike, et du *Minimum Description Length* de Rissanen.

### 2.6.1 Critère AIC

Soit  $u_i = u(i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , les observations d'un processus stationnaire discret, de densité de probabilité (ddp)  $g(u_i)$ . On modélise le processus par un modèle AR d'ordre  $m$  de paramètre  $\hat{\theta}_m$  :

$$\hat{\theta}_m = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m)^T. \quad (2.62)$$

Soit  $f(u_i/\hat{\theta}_m)$  la ddp de  $u_i$  sachant le vecteur des paramètres  $\hat{\theta}_m$ . Akaike a proposé le critère informationnel suivant :

$$AIC(m) = -2 \max \sum_{i=1}^N \ln f(u_i/\hat{\theta}_m) + 2m. \quad (2.63)$$

On utilise le critère  $AIC(m)$  en choisissant la valeur  $m_0$  qui minimise ce critère, c'est-à-dire :

$$m_0 = \underset{m}{\operatorname{argmax}} AIC(m). \quad (2.64)$$

En pratique, le premier terme de (2.63) décroît rapidement avec  $m$ , le second croît linéairement. L'allure typique de la fonction  $AIC(m)$  est donnée à la figure 2.4.

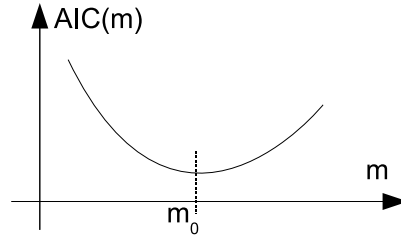


FIGURE 2.4 – Allure typique de la variation du critère AIC en fonction du nombre de paramètres  $m$

### 2.6.2 Minimum description length

L'idée de Rissanen repose sur la question suivante : combien faut-il de bits (donc quelle est la longueur du mot binaire) pour encoder l'ensemble d'échantillons  $u(1), \dots, u(N)$  ?

Bien sûr, si la suite est aléatoire, ce nombre est grand ; en revanche, si la suite est générée par un modèle simple, il suffit d'avoir les paramètres du modèle, donc très peu de bits sont nécessaires. D'où le nom de Minimum Description Length (MDL).

Asymptotiquement, c'est-à-dire pour  $N \rightarrow \infty$ , on montre que :

$$MDL(m) = - \max \sum_{i=1}^N \ln f(u_i / \hat{\theta}_m) + \frac{1}{2} m \ln N. \quad (2.65)$$

On remarque que les deux termes, comme dans le critère  $AIC(m)$ , varient en sens contraire lorsque  $m$  augmente. Ici, l'ordre du modèle est pondéré par le nombre d'échantillons : ceci indique que si  $N$  est petit, il est illusoire de prendre  $m$  trop grand, car il sera impossible d'estimer correctement  $m$  paramètres. Souvent de façon empirique, pour estimer  $m$  paramètres, on considère qu'il faut environ  $N \approx 10m$  échantillons.