

Series of Exercises 03 Algebraic Structure

Exercise 1 1. We provide \mathbb{R} with the internal composition law $*$ defined by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- Show that $*$ are commutative laws, not associative laws, and 1 is a neutral element of $*$.
 - Solve the following equations : $x * 2 = 5$ and $x * x = 1$
2. We provide \mathbb{R}^{+*} with the internal composition law $*$ defined by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Show that $*$ are commutative laws, associative laws, and 0 is a neutral element of $*$.
- Show that no element of \mathbb{R}^{+*} has an inverse element with $*$.

Exercise 2 Let $*$ the internal composition law defined in \mathbb{R} by :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x + y + x^2 y^2$$

1. Verify $*$ are commutative laws.
2. The law $*$ is it associative ?
3. Show that \mathbb{R} have a neutral element for the law $*$ then calculate this neutral.
4. Solve the following equations : $1 * x = 1$, $2 * x = 7$

Exercise 3 Let the four functions of \mathbb{R}^* in \mathbb{R}^* :

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Show that (G, o) an abelian group (commutative group) with $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Exercise 4 Let $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ and $*$ the law in G defined by :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Show that $(G; *)$ is a commutative group.
2. Let $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Show that $(G', *)$ is a subgroup of $(G, *)$

Exercise 5 We consider on \mathbb{R} an internal composition law given by :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. Show that $(\mathbb{R}, *)$ is an abelian group.

2. Let the two applications be defined of $(\mathbb{R}, *)$ in $(\mathbb{R}, +)$ by :

$$f(x) = 3x \quad \text{and} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Are these applications an homomorphism from a group $(\mathbb{R}, *)$ to a group $(\mathbb{R}, +)$?

Exercice 6 We provide $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ of two laws defined by :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Show that $(A, +)$ is an commutative group.
2. (a) Show that the law \times is commutative.
(b) Show that \times is associative.
(c) Find the neutral element of A for the law \times .
(d) Show that $(A, +, \times)$ is a commutative ring.

Série de TD 03 Les Structures Algébriques

exercice 1 1. On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

- Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.
 - Résoudre les équations suivantes : $x * 2 = 5$ et $x * x = 1$
2. On munit \mathbb{R}^{+*} de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est un élément neutre.
- Montrer que aucun élément de \mathbb{R}^{+*} n'a de symétrique pour $*$.

exercice 2 Soit $*$ la loi interne définie dans \mathbb{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x * y = x + y + x^2 y^2$$

1. Vérifier que $*$ est commutative.
2. La loi $*$ est-elle associative ?
3. Montrer que \mathbb{R} admet un élément neutre pour la loi $*$ et calculer ce neutre.
4. Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $1 * x = 1$, $2 * x = 7$

exercice 3 Soient les quatre fonctions de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^* :

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = \frac{-1}{x}$$

Montrer que (G, o) est un groupe abélien (commutatif) avec $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

exercice 4 Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrer que $(G; *)$ est un groupe non commutatif.
2. Soit $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Montrer que $(G', *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$

exercice 5 On considère sur \mathbb{R} une loi de composition interne donnée par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ par :

$$f(x) = 3x \quad \text{et} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Ces applications sont-elles des morphismes de groupes ?

exercice 6 On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

1. Montrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif.
2. **(a)** Montrer que la loi \times est commutative.
(b) Montrer que \times est associative
(c) Déterminer l'élément neutre de A pour la loi \times .
(d) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Corrigé Série de TD 03

Corrigé exercice 1 1. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

a) Montrons que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est un élément neutre.

— Montrons que $*$ est commutative :

$$\text{On a : } x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x$$

donc, la loi $*$ est commutative.

— Montrons que $*$ n'est pas associative :

Prenons $x = 0, y = 2, z = 3$, on a :

$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = (-3) * 3 = 55$$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * 30 = -899$$

donc : la loi $*$ n'est pas associative.

— Montrons que 1 est l'élément neutre : On a : $1 * x = 1 \times x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$

De plus comme la loi est commutative $x * 1 = 1 * x = x$

donc : 1 est l'élément neutre.

b) Résolvons les équations suivantes :

$$- x * 2 = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

donc : $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{4}{3}$

$$- x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$

donc : $x_1 = 0, x_2 = -1$ et $x_3 = 1$

2. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) Montrons que $*$ est commutative, associative, et que 0 est un élément neutre :

— La loi $*$ commutative :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

donc : la loi $*$ est commutative.

— La loi $*$ associative :

$$(x * y) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 * z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x * (y * z) = x * \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

donc : la loi $*$ est associative.

— On a : $x * 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x| = x$ car $x > 0$

comme $*$ est commutative, alors : $x * 0 = 0 * x = x$

donc : 0 est l'élément neutre.

b) Montrons que aucun élément de \mathbb{R}^{+*} n'a de symétrique pour $*$:

Supposons que x admette un symétrique x' , alors :

$$x * x' = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x'^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x'^2 = 0 \Leftrightarrow x = x' = 0 \text{ or } x > 0 \text{ et } x' > 0$$

donc : $x * x' = 0$ est impossible, pour tout $x > 0$, donc x n'a pas de symétrique.

Corrigé exercice 2 On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + x^2 y^2$

1. Vérifions que $*$ est commutative :

$$x * y = x + y + x^2 y^2 = y + x + y^2 x^2 = y * x$$

donc : la loi $*$ est commutative.

2. Prenons : $x = 1, y = 2, z = 3$
 $(x * y) * z = (1 * 2) * 3 = 7 * 3 = 451$
 $x * (y * z) = 1 * (2 * 3) = 1 * 41 = 1723$
donc : la loi $*$ n'est pas associative.
3. Montrons que \mathbb{R} admet un élément neutre pour la loi $*$ et calculons ce neutre :
 $x * e = x \Leftrightarrow x + e + x^2 e^2 = x$
donc : $e(1 + ex^2) = 0 \Rightarrow e = 0, e = \frac{-1}{x^2}$ on a : $x * 0 = x$
et comme l'élément neutre est unique alors : $e = 0$
4. Résolvons les équations suivantes :
 $1 * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$
 $2 * x = 7 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{-5}{4}$

Corrigé exercice 3 On a : $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ avec : $f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = \frac{-1}{x}$
Montrons que (G, o) est un groupe abélien :

1. On a :

o	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_3	f_1

On remarque que la loi o est interne.

$$\forall f_i, f_j \in G \text{ on a : } f_i \circ f_j \in G$$

2. La loi o est associative :

$$\forall f_i, f_j, f_k \in G \text{ on a : } (f_i \circ f_j) \circ f_k = f_i \circ (f_j \circ f_k)$$

3. f_1 est l'élément neutre pour cette loi (d'après le tableau).
4. chaque élément admet un élément symétrique qui est lui même.
5. Cette loi est commutative.
On déduit que (G, o) est un groupe abélien.

Corrigé exercice 4 Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Montrons que $(G; *)$ est un groupe non commutatif :

a) Comme $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors : $xx' \neq 0$ donc : $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

donc : la loi $*$ est une loi interne.

- b) On a :

$$\begin{aligned} [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \\ (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \end{aligned}$$

donc : la loi $*$ est associative.

c) Soit $(a, b) \in G$ tel que pour tout $(x, y) \in G$ on a :

$$(x, y) * (a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (ax, ay + b) = (x, y)$$

donc :

$$\begin{cases} ax = x \Rightarrow a = 1 \\ ay + b = y \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

alors : $(1, 0)$ est l'élément neutre.

d) Soit $(x, y) \in G$ on cherche $(x', y') \in G$ tel que :

$$(x, y) * (x', y') = (1, 0) \Leftrightarrow (xx', xy' + y) = (1, 0)$$

donc :

$$\begin{cases} xx' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \neq 0 \\ xy' + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y}{x} \end{cases}$$

alors, le symétrique de (x, y) est $(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x})$

donc : $(G, *)$ est un groupe.

e) Comme : $(1, 2) * (2, 0) = (2, 2)$ et $(2, 0) * (1, 2) = (2, 4)$ il est clair que ce groupe n'est pas commutatif.

2. Soit $G' =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, Montrons que $(G', *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$:
 G' sous groupe de G si et seulement si :

$$\begin{cases} a) G' \neq \emptyset \Leftrightarrow e \in G' \\ b) \forall x, y \in G' \Rightarrow x * y^{-1} \in G' \end{cases}$$

a) L'élément neutre $(1, 0) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} = G'$, alors : $G' \neq \emptyset$

b) Soit $(x, y) \in G'$ et $(x', y') \in G'$ alors :

$$(x, y) * (x'^{-1}, y'^{-1}) = (x, y) * (\frac{1}{x'}, \frac{-y'}{x'}) = (\frac{x}{x'}, \frac{-xy' + x'y}{x'}) \in G'$$

comme $\frac{x}{x'} > 0$. alors : $(x, y) * (x'^{-1}, y'^{-1}) \in G'$

donc : $(G', *)$ est un sous groupe de $(G, *)$

Corrigé exercice 5 On considère sur \mathbb{R} une loi de composition interne donnée par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = a + b + \frac{1}{6}.$$

1. Montrons que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

a) **La commutativité** :

$$a * b = a + b + \frac{1}{6} = b + a + \frac{1}{6} = b * a$$

d'où la loi $*$ est commutative.

b) **L'associativité** :

$$(a * b) * c = (a + b + \frac{1}{6}) * c = a + b + \frac{1}{6} + c + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + \frac{1}{6}) = a + b + c + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = a + b + c + \frac{1}{3}$$

d'où $*$ est associative.

c) On a : $a * e = e * a = a \Leftrightarrow a + e + \frac{1}{6} = a \Rightarrow e = \frac{-1}{6} \in \mathbb{R}$
d'où l'élément neutre est $e = \frac{-1}{6}$

d) $a * a' = a' * a = e \Leftrightarrow a + a' + \frac{1}{6} = \frac{-1}{6} \Rightarrow a' = \frac{-1}{3} - a \in \mathbb{R}$ donc chaque élément $a \in \mathbb{R}$
admet un élément symétrique $a' = \frac{-1}{3} - a \in \mathbb{R}$
on déduit que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2. Soit les deux applications définies de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$ par :

$$f(x) = 3x \quad \text{et} \quad g(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

a) $f : (\mathbb{R}, *) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ est morphisme de groupe si et seulement si : $f(x * y) = f(x) + f(y)$

On a :

$$f(x * y) = 3(x * y) = 3\left(x + y + \frac{1}{6}\right) = 3x + 3y + \frac{1}{2}$$

$$f(x) + f(y) = 3x + 3y$$

donc : f n'est pas un morphisme de groupe.

b) On a : $g(x * y) = 3(x * y) + \frac{1}{2} = 3x + 3y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1$

et : $g(x) + g(y) = 3x + \frac{1}{2} + 3y + \frac{1}{2} = 3x + 3y + 1$

alors, g est un morphisme de groupe.