L1 Informatique
Algèbre 1

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies

Département d'Informatique

2022/2023
Durée : 1h30

# Examen D'Algèbre 1

**Exercice 1** ***(4 points)***
*Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vrais ou fausse tout en justifiant votre réponse :*

1. $\exists x \in \mathbb{N}$ , $2 < x < 4$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ *si :* $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Rightarrow a = b$.
3. *Toute fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *est dérivable.*
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n(n+1) = 2p$.

**Exercice 2** ***(6 points)***
*Soit* $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application définie par* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. *Déterminer* $f\left(\left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}\right)$ *et* $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right)$ .
2. *L'application* $f$ *est-elle injective ? Est-elle surjective ?*
3. *Montrer que la restriction* $g : [-1, 0] \longrightarrow [0, 1], \quad g(x) = f(x)$ *est bijective.*
4. *Déterminer l'application réciproque* $g^{-1}$

**Exercice 3** ***(4 points)***
*Soit* $R$ *la relation binaire définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \Leftrightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$

1. *Montrer que* $R$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer la classe d'équivalence de* $0$, *et en déduire celle de* $1$.

**Exercice 4** ***(6 points)***
*Soit* $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. *On définie sur* $G$ *la loi de composition interne notée* $*$ *par :*

$$\forall (x, y), (x', y') \in G \quad (x, y) * (x', y') = (xx', yx' + y'x^2)$$

1. *Calculer* $(-1, 1) * (-1, 2)$ *et* $(-1, 2) * (-1, 1)$.
2. *La loi* $*$ *est-elle commutative ?*
3. *Montrer que* $(G; *)$ *est un groupe.*
4. *Soit* $H = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$, *Montrer que* $(H, *)$ *est un sous-groupe de* $(G, *)$.

# Corrigée d'Examen D'Algèbre 1

**Exercice 5** ***(4 points)***
*Parmi les propositions suivantes, déterminer celles qui sont vrais ou fausse tout en justifiant votre réponse :*

1. $\exists x \in \mathbb{N}$ , $2 < x < 4$.
   *Cette propositions est vraie car pour* $x = 3 \in \mathbb{N}$*, on a* $2 < 3 < 4$. ***(1pt)***
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ *si :* $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Rightarrow a = b$.
   *Cette proposition est vraie, en utilisant le raisonnement par l'absurde.Supposons que* $a \neq b$ *et* $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$*, alors :*
   $$\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} \Rightarrow a^2 + a = b^2 + b$$
   $$\Rightarrow a^2 - b^2 = -a + b \Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b)$$
   *et comme* $a \neq b$*, on trouve :* $a + b = -1$.
   *d'où la contradiction avec le fait que* $a, b \in \mathbb{R}^+$. ***(1pt)***
3. *Toute fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *est dérivable.*
   *Cette proposition est fausse car la fonction* $|x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *mais elle n'est pas dérivable sur* $\mathbb{R}$. ***(1pt)***
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n(n+1) = 2p$.
   *Cette proposition est vraie, en utilise le raisonnement par récurrence.*
   — *Pour* $n = 0$*, il existe un* $p = 0$*, tel que :* $0(0+1) = 2 \times 0$.
   — *Supposons que la proposition est vraie pour* $n$ *est on la démontre pour* $n+1$*. Alors :*
   $$(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2(n+1) = 2p + 2(n+1)$$
   $$(n+1)(n+2) = 2(p+n+1) = 2p'$$
   *D'où, il existe un* $p' \in \mathbb{N}$ *tel que la proposition est vraie pour* $n+1$. ***(1pt)***

**Exercice 6** ***(6 points)***
*Soit* $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application définie par* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. *On a :*
   $$\begin{aligned} f\left(\left\{\tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right\}\right) &= \left\{f(\tfrac{-1}{2}), f(\tfrac{-1}{2}), f(1)\right\} \\ &= \left\{\sqrt{\tfrac{3}{4}}, 0\right\} \end{aligned}$$
   *et*
   $$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left\{\tfrac{1}{2}, 2\right\}\right) &= \left\{x \in [-1,1], f(x) \in \left\{\tfrac{1}{2}, 2\right\}\right\} \\ &= \left\{x \in [-1,1], f(x) = \tfrac{1}{2} \quad \text{où} \quad f(x) = 2 (\text{n'admet pas de solution})\right\} \\ &= \left\{-\sqrt{\tfrac{3}{4}}, \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right\} \end{aligned}$$
2. *Etudions l'injectivité et la surjectivité de* $f$ *:*
   — *Il suffit de prendre* $x_1 = \frac{-1}{2}$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}$ *on a :* $f(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ *mais* $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{2}$ *Alors* $f$ *n'est pas injective.*
   — *Il suffi de prendre* $y = 2$*, il n'existe aucun* $x \in [-1, 1]$ *tel que* $f(x) = 2$*. car l'équation* $\sqrt{1-x^2} = 2$ *n'a pas de solution réelle. Alors* $f$ *n'est pas surjective.*
3. *Soit* $g : [-1, 0] \longrightarrow [0, 1]$ *telle que* $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

— *Soit* $x_1, x_2 \in [-1, 0]$, *on a :*

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Rightarrow \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \\ &\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \textit{car sont de même signe} \end{aligned}$$

*Alors* $f$ *est injective.*

— *Soit* $y \in [0, 1]$, *cherchons* $x \in [-1, 0]$ *tel que* $y = g(x)$. *on a :*

$$\begin{aligned} y = g(x) &\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \\ &\Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} \quad \textit{où} \quad x = -\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

*Il suffit de prendre :* $x = -\sqrt{1-y^2}$ *car :*

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -y^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-y^2} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-y^2} \leq 0$$

*Alors* $f$ *est surjective. Par suite* $f$ *est bijective.*

4. $g^{-1} : [0, 1] \longrightarrow [-1, 0]$ *avec* $g^{-1}(y) = \sqrt{1-y^2}$

**Exercice 7** ***(4 points)***

*On a*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \Leftrightarrow x^4 - y^4 = x^2 - y^2$$

1. *Pour montrer que* $R$ *est une relation équivalence il faut qu'elles soit : réflexive, symétrique et transitive.*

— *La réflexivité*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xRx \Leftrightarrow x^4 - x^4 = x^2 - x^2 \Rightarrow 0 = 0$$

*donc la relation* $R$ *est réflexive.*

— *La symétrie* $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *montrons que :* $xRy \Rightarrow yRx$

$$x^4 - y^4 = x^2 - y^2 \Rightarrow (-1) \times (x^4 - y^4) = (-1) \times (x^2 - y^2) \Rightarrow y^4 - x^4 = y^2 - x^2$$

*se qui implique que* $yRx$. *Donc : la relation* $R$ *est symétrique.*

— *La transitivité* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *montrons que :* $xRy \quad \text{et} \quad yRz \Rightarrow xRz$

*On a :*$x^4 - y^4 = x^2 - y^2$ *et* $y^4 - z^4 = y^2 - z^2$ *En faisant l'addition on trouve que* $x^4 - z^4 = x^2 - z^2$

*Ce qui veut dire que* $xRz$. *Donc* $R$ *est transitive.*

*Conclusion :* $R$ *est une relation d'équivalence.*

2. $C_0 = \{x \in \mathbb{R}, xR0\}$, *on a*

$$xR0 \Rightarrow x^4 - 0^4 = x^2 - 0^2 \Rightarrow x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -1 \lor x = 1$$

*Donc on conclut que* $C_0 = \{-1, 0, 1\}$. *On remarque que* $1 \in C_0$ *donc* $C_1 = C_0$.

**Exercice 8** ***(6 points)***

1. *On a :* $(-1, 1) * (-1, 2) = (1, 1)$ *et* $(-1, 2) * (-1, 1) = (1, -1)$.
2. *On a :* $(-1, 1) * (-1, 2) \neq (-1, 2) * (-1, 1)$
*Alors* $*$ *n'est pas commutative.*
3. *Montrons que* $(G; *)$ *est un groupe.*

— Soient $(x, y),(x', y'),(x^n, y'') \in G$

$$\begin{aligned}
((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= \left(xx', yx' + y'x^2\right) * (x'', y'') \\
&= \left(xx'x^n, \left(yx' + y'x^2\right) x'' + y'' \left(xx'\right)^2\right) \\
&= \left(xx'x^n, yx'x'' + y'x^2x'' + y''x^2x'^2\right) \\
(x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) &= (x, y) * \left(x'x'', y'x'' + y''x^2\right) \\
&= \left(xx'x'', yx'x'' + \left(y'x^n + y''x'^2\right) x^2\right) \\
&= \left(xx'x'', yx'x'' + y'x''x^2 + y''x'^2x^2\right) \\
&= ((x, y) * (x', y')) * (x^n, y'')
\end{aligned}$$

*Alors la loi $*$ est associative dans $G$.*

— *Cherchons $(e_1, e_2) \in G$, vérifiant $\forall (x, y) \in G : (x, y) * (e_1, e_2) = (x, y)$ et $(e_1, e_2) * (x, y) = (x, y)$ On s $(x, y) * (e_1, e_2) = (x, y)$*

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(xe_1, y\epsilon_1 + e_2x^2\right) = (x, y) \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} xe_1 = x \\ y\epsilon_1 + e_2x^2 = y \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \epsilon_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

*II suffit de prendre $(e_1, e_2) = (1, 0) \in G$ et soit $(x, y) \in G$. On a : $(x, y) * (1, 0) = (x.1, y.1 + 0.x^2) = (x, y)$ et $(1, 0) * (x, y) = (1 \cdot x, 0.x + y \cdot 1^2) = (x, y)$ Alors $(1, 0)$ est l'élément neutre de la loi $*$ dans $G$.*

— *Soit $(x, y) \in G$, cherchons $(x', y') \in G$, vérifiant :*
*$(x, y) * (x', y') = (1, 0)$ et $(x', y') * (x, y) = (1, 0)$*
*On a $(x, y) * (x', y') = (1, 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} xx' = 1 \\ yx' + y'x^2 = 0 \end{array}\right.$*

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{x} \\ y' = -\frac{y}{x'} \end{array}\right.$$

*II suffit de prendre $(x', y') = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right) \in G$.*
*On a : $(x, y) * \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right) = \left(x\frac{1}{x}, y\frac{1}{x} + \left(-\frac{y}{x^3}\right) x^2\right) = (1, 0)$*
*et $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^1}\right) * (x, y) = \left(\frac{1}{x}x, \left(-\frac{y}{x^1}\right) x + y \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = (1, 0)$*
*Alors $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right)$ est l'élément inverse de $(x, y)$ par rapport à la loi $*$ dans $G$. Par suite $(G, *)$ est un groupe.*

4. *On a :*
— *L'élément neutre de $(G, *)$, $(1, 0) \in H$*
— *Soient $(x, y), (x', y') \in H$ . Alors*

$$(x, y) * \left(\frac{1}{x'}, -\frac{y'}{x'^3}\right) = \left(\frac{x}{x'}, \frac{y}{x'} - \frac{y'x^2}{x'^3}\right)$$

*Comme $\frac{x}{x'} \in ]0, +\infty[$ alors $\left(\frac{x}{x'}, \frac{y}{x'} - \frac{y'x^2}{x'^3}\right) \in H$*
*Donc $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$*