L1 Informatics
Algebra 1

Badji Mokhtar – Annaba University
Faculty of Technology

Department of Informatics

2024/2025
Time : 1h30

Algebra Exam

Exercice: 1 ***(7 points)***
Let f the application defined by :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1. *Find E so that f is an application.*
2. *We take : $E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$*
   a) *Determine $f\left(\left\{-\sqrt{2}, \frac{5}{3}, \sqrt{2}\right\}\right)$ and $f^{-1}(\{0\})$.*
   b) *Is the application f injective ? Is it surjective ? Justify your answer.*
3. *Show that the restriction $g :]1, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[, \quad g(x) = f(x)$ is bijective.*
4. *Determine the inverse application g^{-1}.*

Exercice: 2 ***(6 points)***
We define the binary relation $\mathcal{R}$ in $\mathbb{N}^*$ by :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ such that : } y^n = x$$

1. *Show that $\mathcal{R}$ is a order relation.*
2. *Is this order total ? Justify your answer.*

Exercice: 3 ***(7 points)***
Let $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, We define on G the internal composition law $*$ by :

$$\forall (x,y), (x',y') \in G \quad (x,y) * (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

.

1. *Calculate $(2,3) * (1,0)$ et $(1,0) * (2,3)$.*
2. *Show that $(G, *)$ is an abelian group.*
3. *Show that the application f defined by :*

$$f(x,y) = x + iy$$

   is an morphism of group $(G, *)$ in $(\mathbb{C}^*, \times)$.

L1 Informatique
Algèbre 1

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies

Département d'Informatique

2024/2025
Durée : 1h30

Examen D'Algèbre

Exercice 1 ***(7 points)***
Soit f une application définie par :

$$
\begin{aligned}
f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

1. *Trouver E pour que f soit une application.*
2. *On prend : $E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$*
   a) *Déterminer $f\left(\left\{-\sqrt{2}, \frac{5}{3}, \sqrt{2}\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{0\})$.*
   b) *L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? justifier votre réponse.*
3. *Montrer que la restriction $g :]1, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[, \quad g(x) = f(x)$ est bijective.*
4. *Déterminer l'application inverse g^{-1}*

Exercice 2 ***(6 points)***
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^*, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ tel que : } y^n = x$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*
2. *Cet ordre est-il total ? justifier votre réponse.*

Exercice 3 ***(7 points)***
Soit $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on définie sur G la loi de composition interne $*$ par :

$$\forall (x,y), (x',y') \in G \quad (x,y) * (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

.

1. *Calculer $(2,3) * (1,0)$ et $(1,0) * (2,3)$.*
2. *Montrer que $(G,*)$ est un groupe Abélien.*
3. *Montrer que l'application f définie par :*

$$f(x,y) = x + iy$$

   est un morphisme de groupes de $(G,*)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Corrigé d'examen d'Algèbre 1

Exo 1

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1) Trouvons E pour que f soit une application :

f est une application $\iff \forall x \in E, \exists! y \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

$$E = D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$ 0,25 0,5

2) Soit $E =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

a) Déterminons :

$$f(\{-\sqrt{2}, \tfrac{5}{3}, \sqrt{2}\}) = \{f(x) \in \mathbb{R} \,/\, x \in \{-\sqrt{2}, \tfrac{5}{3}, \sqrt{2}\}\} = \{f(-\sqrt{2}), f(\tfrac{5}{3}), f(\sqrt{2})\}$$ 0,25
$$= \{1, \tfrac{3}{4}\}$$ 0,75

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,/\, f(x) \in \{0\}\}$$ 0,25

On a : $f(x) \in \{0\} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$ (l'équation n'admet pas de solution) 0,25

donc : $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ 0,25

b) – f n'est pas injective car : $\exists\, x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2} \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

tel que : $-\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$ mais $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$. 0,75

– f n'est pas surjective car : Pour $y = 0$, $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

On a : $f(x) \neq y$ (0 n'a pas d'antécédant dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$) 0,75

3) Soit $g :]1,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$

$$x \longmapsto g(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Montrons que g bijective :

a) <u>L'injection :</u> $\forall x_1, x_2 \in]1,+\infty[: g(x_1) = g(x_2) \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$ 0,25

$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x_2^2-1}}$ 0,25 $\Rightarrow \sqrt{x_1^2-1} = \sqrt{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2-1 = x_2^2-1$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ (car x_1 et x_2 ont le même signe)

donc : g est injective. 0,75

b) <u>Surjection :</u> $\forall y \in]0,+\infty[, \exists x \in]1,+\infty[$ tel que : $g(x) = y$ 0,25

$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = y$ 0,25 $\Rightarrow \frac{1}{x^2-1} = y^2 \Rightarrow x^2-1 = \frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{y^2} + 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y^2}+1}$ (car $x \in]1,+\infty[$) 0,25

On a : pour $y \in]0,+\infty[\Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y^2}+1} > 1 \Rightarrow x \in]1,+\infty[$ 0,25

donc : g est surjective.

De (a) et (b), g est bijective. 0,25

4) Déterminons l'application inverse g^{-1}

$g^{-1} :]0,+\infty[\longrightarrow]1,+\infty[$ 0,5

$$y \longmapsto g^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y^2}+1}$$

Exo 2 : Soit la relation binaire R définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^* : x R y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } y^n = x$$

1) Montrons que R est une relation d'ordre :

a) R est-elle réflexive ?

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}^* : x R x$ (vraie) 0,25

$\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists n = 1 \in \mathbb{N}$ tel que $x^1 = x \Rightarrow x R x$ est vraie

$\Rightarrow R$ est réflexive. 1

b) R est-elle antisymétrique ?

R est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R x \end{cases} \Rightarrow x = y$ 0,25

On a : $\begin{cases} x R y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } y^n = x \\ \text{et} \\ y R x \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^p = y \end{cases}$ 0,5

$\Rightarrow x^p = (y^n)^p = y^{np} = y \Rightarrow np = 1 \Rightarrow n = p = 1$

donc : $x = y$ 1

Ce qui implique que R est antisymétrique.

c) R est-elle transitive ?

R est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$ 0,25

On a : 0,5 $\begin{cases} x R y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y^n = x \\ y R z \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} : z^p = y \end{cases} \Rightarrow y^n = (z^p)^n = z^{pn} = x$ 1

donc : $\exists q = pn \in \mathbb{N}$ tel que : $z^q = x \Rightarrow x R z$

donc : R est transitive.

Conclusion : R est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$ 0,25

2) L'ordre est total ssi : $\forall x, y \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} x R y \\ \text{ou} \\ y R x \end{cases}$ 0,25

L'ordre n'est pas total car : pour $x = 2$ et $y = 3$ on a :

$2 \not R 3$ et $3 \not R 2$ 0,75

Exo 3 : Soit $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et

$\forall (x,y);(x',y')\in G : (x,y)*(x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y)$

1) Calculons : $(2,3)*(1,0)$ et $(1,0)*(2,3)$

$(2,3)*(1,0) = (2,3)$ 0,5 et $(1,0)*(2,3) = (2,3)$ 0,5

2) Montrons que $(G,*)$ est un groupe Abélien

a) La commutativité

$*$ est commutative $\forall (x,y);(x',y')\in G : (x,y)*(x',y') = (x',y')*(x,y)$ 0,25

$(x,y)*(x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y) = (x'x-y'y, x'y+xy') = (x',y')*(x,y)$

donc $*$ est injective. 0,75

b) L'associativité :

$*$ est associative : $\forall (x,y);(x',y');(x'',y'')\in G$:

$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$ 0,25

$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (xx'-yy', xy'+x'y)*(x'',y'')$

$= (xx'x''-x''yy'-xy'y''-x'yy'', xx'y''-yy'y''+xx''y'+x'x''y)$ 0,5

$(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] = (x,y)*(x'x''-y'y'', x'y''+x''y')$

$= (xx'x''-xy'y''-x'yy''-x''yy', xx'y''+xx''y'+x'x''y-yy'y'')$ 0,5

donc : $[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$ 0,25

ce qui implique : $*$ est associative.

c) L'élément neutre :

Montrons qu'il existe un élément neutre $e=(e_1,e_2)$ dans G tel que :

41) $\forall (x,y)\in G : (x,y)*(e_1,e_2) = (e_1,e_2)*(x,y) = (x,y)$ 0,25

$(x,y)*(e_1,e_2) = (x,y) \Rightarrow (xe_1-ye_2, xe_2+ye_1) = (x,y)$

On trouve : $\begin{cases} x e_1 - y e_2 = x \\ x e_2 + y e_1 = y \end{cases}$ 0,25

On résoud le système on trouve : $e_1 = 1$ et $e_2 = 0$

donc l'élément neutre $e = (1, 0)$ 0,5

M2) D'après la première question, on a :

$\forall (x, y) \in G$: $(x, y) * (1, 0) = (1, 0) * (x, y) = (x, y)$

donc l'élément neutre $e = (1, 0)$

d) L'élément symétrique :

Montrons que : $\forall (x, y) \in G$, $\exists (x^{-1}, y^{-1}) \in G$ tel que :

$(x, y) * (x^{-1}, y^{-1}) = (x^{-1}, y^{-1}) * (x, y) = (1, 0)$ 0,25

$(x, y) * (x^{-1}, y^{-1}) = (1, 0) \Rightarrow (x x^{-1} - y y^{-1}, x y^{-1} + x^{-1} y) = (1, 0)$

donc : 0,25 $\begin{cases} x x^{-1} - y y^{-1} = 1 \\ x y^{-1} + x^{-1} y = 0 \end{cases}$ On résoud le système on trouve :

$x^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ et $y^{-1} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ 0,5

On remarque que : $x^{-1} \neq 0$ et $y^{-1} \neq 0$ car $(x, y) \neq (0, 0)$

donc : $(x^{-1}, y^{-1}) \in G$ 0,25

Conclusion : $(G, *)$ est un groupe Abélien 0,25

3) Montrons que f définie par : $f(x,y) = x + iy$
est un morphisme de groupes $(G,*)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

f est un morphisme de groupes ssi :

$\forall (x,y) \in G, \forall (x',y') \in G : f[(x,y)*(x',y')] = f(x,y) \times f(x',y')$ 0,25

On a : $f[(x,y)*(x',y')] = f(xx' - yy', xy' + x'y)$

$= xx' - yy' + i(xy' + x'y)$

$= xx' + i^2 yy' + ixy' + ix'y$

$= x(x' + iy') + iy(x' + iy')$ 0,75

$= (x + iy)(x' + iy')$

$= f(x,y) \times f(x',y')$

donc : f est morphisme.