Chapitre I: Théorie et Applications des Lignes de Transmission

1. Introduction

On peut négliger l'aspect de la propagation des ondes électromagnétiques dans un système électrique, en basse fréquence. Les courants et les tensions sont constants tout au long du conducteur qui le parcourt puisque la longueur d'onde est plus grande que la taille de ce dernier. Par contre ils varient tout au long des différents éléments du circuit en haute fréquence. Les ***lignes de transmission*** traitent la variation des courants et des tensions en fonction du temps.

Qu'est-ce que une ligne de transmission ?

Une ligne de transmission (feeders) en anglais, est une structure qui permet de transférer de l'énergie d'un point à un autre sur un support physique. On retrouve partout les lignes de transmission, chez les compagnies de téléphones, réseau informatique, circuit imprimé, sonde d'oscilloscope etc……..

2. Différents types de lignes

Il existe plusieurs types de lignes de transmissions, nous allons en décrire quelques-unes des plus employées.

- **La ligne bifilaire**: Historiquement, c'est la première ligne utilisée. Elle est formée de 2 conducteurs cylindriques identiques parallèles entre eux, on la rencontre sous forme torsadée dans le réseau téléphonique 'filaire'. Un exemple est donné à la figure 1

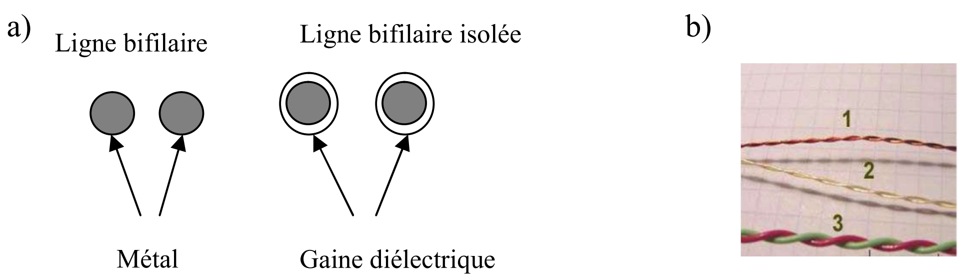

Figure 1.1 : a) lignes bifilaires **b)** lignes bifilaires torsadées

- **La ligne coaxial :** est une ligne très utilisée, elle est formé d'un conducteur central et d'une tresse en cuivre séparés par une gaine en plastique. Il permet de transporter des signaux de toutes les fréquences, selon les dimensions. Un exemple est donné à la figure 1.2.

Figure 1.2 : Câble coaxial

- **Les lignes planaires**: Elles sont de bonne qualité en termes de propagation pour de faibles puissances. Parmi les lignes planaires on trouve les lignes micro-rubans, les lignes coplanaires et les lignes à fentes. La ligne micro-ruban est la plus utilisé pour les circuits intégrés à haute fréquence contrairement à la ligne à fente est moins utilisée en raison des pertes importantes en HF

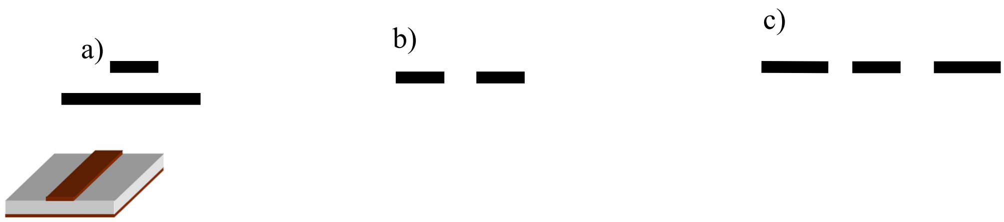

Figure 1.3 : Lignes planaires a) ligne micro-ruban b) ligne à fente c) ligne coplanaire

3. Modèle circuit d'une ligne de transmission

3.1 Introduction

Pour modéliser une ligne de transmission on va la découper en petit tronçon d'une section de longueur infinitésimale (*dx*), et chaque tronçon va être modélisé sous la forme d'un circuit électrique, basé sur des composants simples (résistances, inductances et capacités), capable de reproduire fidèlement le comportement de la ligne (figure 1.4). La longueur (*dx*) doit être choisie de telle façon que $dx << \lambda$ (λ est la longueur d'onde)

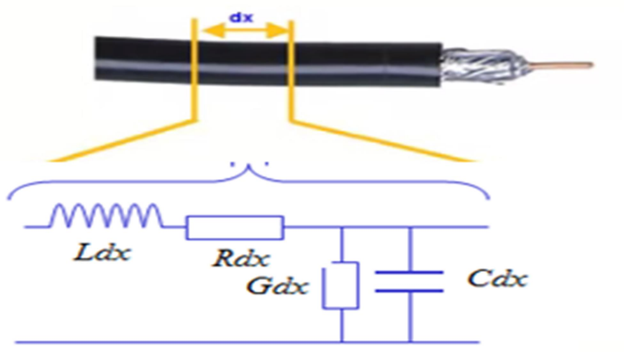

Figure 1.4 : Schéma équivalent d'un tronçon de ligne

Les quatre éléments *R*, *L*, *C*, et *G* sont appelés ''***paramètres primaires***'' de la ligne de transmission avec

- *R* : résistance linéique série en (Ω /*m*).
- *L* : inductance linéique série en en (*H*/*m*).

Pertes dans les conducteurs

- *C* : capacité linéique parallèle en (*F*/*m*).
- *G* : conductance linéique parallèle en (S/*m*).

Pertes dans les diélectriques

4. Equation des Télégraphistes

L'équation des télégraphistes permet d'obtenir une description de la propagation de l'onde dans une ligne. Nous allons l'obtenir en écrivant la différence des tensions d'entréee et de sortie et la différence des courants d'entrée et de sortie, en utilisant les équations de Kirchoff : loi des mailles et loi des nœuds.

4.1 Modèle simplifié

- **Cas d'une ligne sans pertes**

Pour simplifier l'étude dans un premier temps, on considère un tronçon de ligne élémentaire compris entre x et x+dx sans résistance ***R*** ni de conductance ***G***, représenté sur la figure 1.5. Il s'agit d'une **ligne sans pertes :**

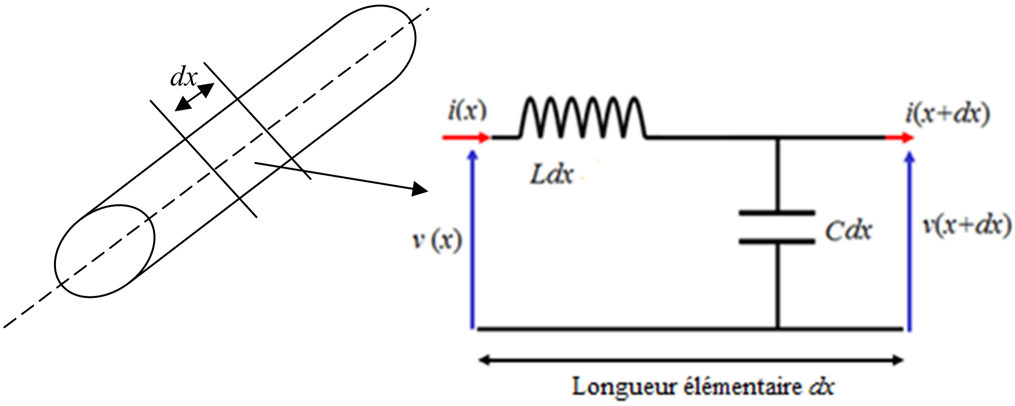

Figure 1.5 : Schéma équivalent d'un tronçon de ligne sans perte

Pour un élément de longueur *dx*, les équations de Kirchoff sur la boucle et sur le nœud donnent :

$$\bar{v}(x+dx,t)-\bar{v}(x,t)=-L\,dx\,\frac{\partial\bar{\imath}(x,t)}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\bar{\imath}(x+dx,t)-\bar{\imath}(x,t)=-C\,dx\,\frac{\partial\bar{v}(x,t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

Du fait que *dx* est un segment infinitésimal de la ligne, on peut écrire :

$$\frac{\bar{v}(x+dx,t)-\bar{v}(x,t)}{dx}=\frac{\partial\bar{v}(x,t)}{\partial x} \tag{5.3}$$

$$\frac{\bar{\imath}(x+d\ \ ,t)-\bar{\imath}(x,t)}{dx}=\frac{\partial\bar{\imath}(x,t)}{\partial x} \tag{1.4}$$

On obtient un système d'équations couplées :

$$\frac{\partial\bar{v}(x,t)}{\partial x}=-L\frac{\partial\bar{\imath}(x,t)}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\bar{\imath}(x,t)}{\partial x}=-C\frac{\partial\bar{v}(x,t)}{\partial t} \tag{1.6}$$

En dérivant l'équation (1.5) par rapport à x et en remplaçons le terme $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$ par son expression équation (1.6)

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 x}=-L\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right)\right) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 x} = -L \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\right)\right) = LC \; \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.8}$$

En combinant ces relations suite à une seconde dérivation et en remplaçant le terme $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$ par son expression on obtient :

$$\frac{\partial^2 \overline{v}(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 \overline{v}(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

De même on obtient :

$$\frac{\partial^2 \overline{\imath}(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 \overline{\imath}(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

Les équations (1.9) et (1.10) s'appellent **les équations des télégraphistes** ou encore les équations des lignes de transmission, car elles décrivent la propagation des ondes le long des lignes.

4.1.1. Equations de propagation : le cas du régime harmonique

Généralement, les signaux transmit sont sinusoïdaux, c'est-à-dire qu'il est possible d'écrire les valeurs instantanées complexes de la tension $\overline{v}(x,t)$ et du courant $\overline{\imath}(x,t)$ qui sont le produit des amplitudes complexes $\overline{V}(x)$et $\overline{I}(x)$ qui ne dépendent que de la variable spatiale x par le facteur complexe exp (jωt).

Les grandeurs complexes associées à $\overline{v}(x,t)$ et $\overline{\imath}(x,t)$ s'écrivent :

$$\bar{v}(x, \omega, t) = \overline{V}(x, \omega)\, e^{j\omega t} \tag{1.11}$$

$$\bar{\imath}(x, \omega, t) = \overline{I}(x, \omega)\, e^{j\omega t} \tag{1.12}$$

En remplaçant $\bar{v}(x, \omega, t)$ et $\bar{\imath}(x, \omega, t)$ par leur grandeur complexe dans les équations (1.5) et (1.6), on obtient :

$$\frac{\partial \overline{V}(x,\omega)}{\partial x} = -\mathrm{j} L\omega \overline{I}(x, \omega) \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \overline{I}(x,\omega)}{\partial x} = -\mathrm{j} C\omega \overline{V}(x, \omega) \tag{1.14}$$

En dérivant l'équation (1.13) par rapport à x et en remplaçant $\frac{\partial \overline{I}(x,\omega)}{\partial x}$ par son expression on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}(x,\omega)}{\partial x^2} = (\mathrm{j}C\omega)\big(\mathrm{j}L\omega\big)\ \bar{V}(x,\omega) = -\ \omega^2 LC\ \bar{V}(x,\omega) \qquad (1.15)$$

De même on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{I}(x,\omega)}{\partial x^2} = (\mathrm{j}C\omega)\big(\mathrm{j}L\omega\big)\ \bar{I}(x,\omega)\ = -\ \omega^2 LC\ \bar{I}(x,\omega) \qquad (1.16)$$

Posons :

$$\gamma = \sqrt{(\mathrm{j}C\omega)(\mathrm{j}L\omega)} = j\omega\sqrt{LC}\ = jk \qquad (1.17)$$

γ est un nombre complexe, purement imaginaire que l'on appelle la constante de propagation. Les équations (1.15) et (1.16) s'écrivent donc:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}(x,\omega)}{\partial x^2}\ -\gamma^2\ \bar{V}(x,\omega)=0 \qquad (1.18)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}(x,\omega)}{\partial x^2} - \gamma^2\ \bar{I}(x,\omega) = 0 \qquad (1.19)$$

Ce sont les équations de propagation de la tension et du courant le long de la ligne. Les équations (1.18) et (1.19) admettent des solutions de la forme :

$$\bar{V}(x)=\overline{V_+}\ e^{-\gamma x}+\overline{V_-}\ e^{\gamma x} = \overline{V_+}\ e^{-jkx} +\overline{V_-}\ e^{jkx} \qquad (1.20)$$

$$\bar{I}(x)=\overline{I_+}\ e^{-\gamma x}+\overline{I_-}\ e^{\gamma x}\ =\ \overline{I_+}\ e^{-jkx}+\overline{I_-}\ e^{jkx} \qquad (1.21)$$

où $\overline{V_+}$, $\overline{V_-}$, $\overline{I_{+\iota}}$ et $\overline{I_-}$ sont des constantes d'intégrations

Le signal se décompose en deux termes. Le premier terme $\overline{V_+}\ e^{-jkx}$correspond à l'onde incidente, le second terme $\overline{V_-}\ e^{jk}$ correspond à l'onde réfléchie.

La vitesse de phase est donnée par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (1.22)$$

Remarque :

- **Relation de dispersion** :
  La relation $k^2 = \omega^2 LC$ est appelée relation de dispersion

- **Impédance caractéristique** :

L'impédance caractéristique est le rapport de la tension au courant à l'intérieur de la ligne.

Les constantes d'intégrations sont liées deux à deux par:

$$\frac{\overline{V_+}}{\overline{I_+}} = -\frac{\overline{V_-}}{\overline{I_-}} = \sqrt{\frac{jL\omega}{jC\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (1.23)$$

$\sqrt{\frac{L}{C}}$: est une quantité réelle exprimée en Ω, homogène à une impédance qu'on note Z_c et qu'on appelle impédance caractéristique de la ligne.

4.2. Modèle réel

En général, les conducteurs et les diélectriques utilisés ne sont pas parfaits. Il faut tenir compte des pertes dans le métal et des fuites dans le diélectrique. Tenant compte des phénomènes négligés précédemment, il sera introduit ainsi 4 paramètres *R*, *L*, *C*, et *G* (figure 1.6).

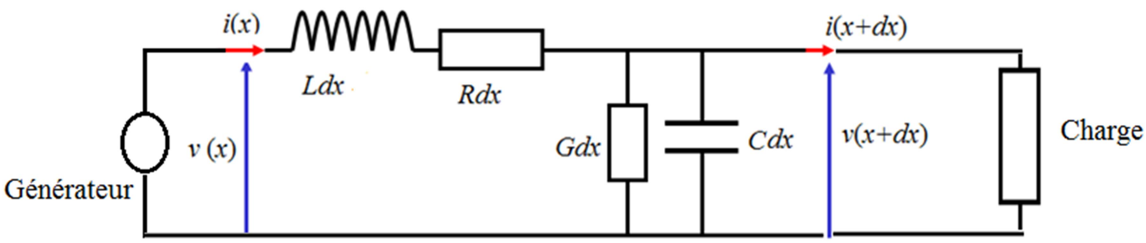

Figure 1.6 : Modèle réel d'une ligne de transmission électrique.

En suivant le même raisonnement que pour le modèle simplifié les équations (1.1) et (1.2) deviennent :

$$\bar{v}(x+dx,t) - \bar{v}(x,t) = -R\,dx\,\bar{\imath}(x,t) - L\,dx\,\frac{\partial \bar{\imath}(x,t)}{\partial t} \qquad (1.24)$$

$$\bar{\imath}(x+dx,t) - \bar{\imath}(x,t) = -G\,dx\,\bar{v}(x,t) - C\,dx\,\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial t} \qquad (1.25)$$

du fait que *dx* est un segment infinitésimal de ligne, on peut écrire :

$$\frac{\bar{v}(x+dx,t) - \bar{v}(x,t)}{dx} = \frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x} \text{ et } \frac{\bar{\imath}(x+dx,t) - \bar{\imath}(x,t)}{dx} = \frac{\partial \bar{\imath}(x,t)}{\partial x} \qquad (1.26)$$

Ce qui permet d'obtenir les deux équations :

$$\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x} = -R\,\bar{\imath}(x,t) - L\frac{\partial \bar{\imath}(x,t)}{\partial t} \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial \bar{\imath}(x,t)}{\partial t} = -G\,\bar{v}(x,t) - C\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial t} \tag{1.28}$$

4.2.1. Equations de propagation : le cas du régime harmonique

$$\frac{\partial \bar{V}(x,\omega)}{\partial x} = -R\,\bar{I}(x,\omega) - jL\omega\bar{I}(x,\omega) = -(R + jL\omega)\bar{I}(x,\omega) \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial \bar{I}(x,\omega)}{\partial x} = -G\,\bar{V}(x,\omega) - jC\omega\bar{V}(x,\omega) = -(G + jC\omega)\bar{V}(x,\omega) \tag{1.30}$$

En éliminant $\bar{V}(x,\omega)$ entre les deux équations et en dérivant l'équation (1.28) par rapport à x on a:

$$\frac{\partial^2 \bar{I}(x,\omega)}{\partial x^2} = (G + jC\omega)(R + jL\omega)\,\bar{I}(x,\omega) \tag{1.31}$$

De même on obtient :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}(x,\omega)}{\partial x^2} = (G + jC\omega)(R + jL\omega)\,\bar{V}(x,\omega) \tag{1.32}$$

Ces deux équations sont appelées équations des Télégraphistes.

L'expression de la constante de propagation γ devient :

$$\gamma = \sqrt{(G + jC\omega)(R + jL\omega)} \tag{1.33}$$

avec γ nombre complexe de la forme $\gamma = \alpha + jk$

- La partie réelle α est un paramètre d'affaiblissement linéique, souvent exprimée en décibels par mètre ou en Nepers par mètre (1dB =0.1151 Np).
- La partie imaginaire k est un paramètre de phase, et représente le déphasage linéique, exprimée en radians par mètre (1radian =57.30°)
- Les constantes d'intégrations sont liées deux à deux par:

$$\frac{\overline{V_+}}{\overline{I_+}} = -\frac{\overline{V_-}}{\overline{I_-}} = \sqrt{\frac{(R+jL\omega)}{(G+jC\omega)}} = \overline{Z_c} \tag{1.34}$$

avec
$$\overline{Z_c} = \sqrt{\frac{(R+jL\omega)}{(G+jC\omega)}} \tag{1.35}$$

Donc pour une ligne de transmission avec pertes, l'impédance caractéristique est un nombre complexe, où R et G sont respectivement la résistance et la conductance de pertes par unité de longueur.

Les relations (1.25) et (1.26) donnent comme solutions :

$$\bar{I}(x)=\overline{I_+}\, e^{-\gamma x}+\overline{I_-}\, e^{\gamma x} \rightarrow \bar{\imath}(x,t) = \overline{I_+}(x)e^{-\alpha x}e^{j(\omega t-kx)} + \overline{I_-}(x)e^{\alpha x}e^{j(\omega t+kx)} \quad (1.36)$$

$$\bar{V}(x)=\overline{V_+}\, e^{-\gamma x}+\overline{V_-}\, e^{\gamma x} \rightarrow \bar{v}(x,t) = \overline{V_+}(x)e^{-\alpha}\, e^{j(\omega t-kx)} + \overline{V_-}(x)e^{\alpha x}e^{j(\omega t+kx)} \quad (1.37)$$

On met ainsi en évidence que la solution générale de l'équation de propagation (des télégraphistes) est la superposition de deux ondes progressives de sens opposés qui constituent un système d'ondes stationnaires.

4.3. Coefficient de réflexion

Le coefficient de réflexion Γ en un point x quelconque est définit comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à l'amplitude de l'onde incidente en ce point. Il traduit la réflexion sur un obstacle ou une discontinuité de la ligne de propagation.

Pour une onde progressive de tension, on définit dans le cas général le coefficient de réflexion $\overline{\Gamma_+}(x)$ en un point x de la ligne par :

$$\overline{\Gamma_+}(x) = \frac{\overline{V_-}}{\overline{V_+}}\frac{e^{\gamma x}}{e^{-\gamma x}} = \frac{\overline{V_-}}{\overline{V_+}}e^{2\gamma x} \quad (1.38)$$

Si on considère que la ligne d'impédance caractéristique $\overline{Z_c}$, se termine en l sur une impédance $\overline{Z_l}$. On peut exprimer $\overline{Z_l}$ en utilisant les équations (1.35), (1.36) et (1.33):

$$Z_l = \frac{\overline{V(l)}}{\overline{I(l)}} = \frac{\overline{V}_+ e^{-\gamma l} + \overline{V}_- e^{\gamma l}}{\overline{I}_+ e^{-\gamma l} + \overline{I}_- e^{\gamma l}} = \overline{Z_c}\,\frac{\overline{V}_+ e^{-\gamma l} + \overline{V}_- e^{\gamma l}}{\overline{V}_+ e^{-\gamma l} - \overline{V}_- e^{\gamma l}} \quad (1.39)$$

Soit :
$$Z_l = \overline{Z_c}\,\frac{1+\overline{\Gamma_+}(l)}{1-\overline{\Gamma_+}(l)} \quad (1.40)$$

Finalement on obtient :
$$\bar{\Gamma}(x=l) = \frac{\overline{Z_l}-\overline{Z_c}}{\overline{Z_l}+\overline{Z_c}} \quad (1.41)$$

où on a introduit **l'impédance réduite** obtenue en divisant Z_l par Z_c

$$z = \frac{\overline{Z_l}}{\overline{\overline{Z_c}}} = \frac{1+\overline{\Gamma_+}(l)}{1-\overline{\overline{\Gamma_+}}(l)} \qquad (1.\ 42)$$

4.4. Conditions particulières de charges

4.4.1. Charge adaptée

Si la ligne sera terminée par une impédance $\overline{Z_l} = \overline{Z_c}$, le coefficient de réflexion s'annule. L'onde n'est pas réfléchie. C'est une onde qui se propage de la même manière que si la ligne était infinie.

4.4.2. Court-circuit

Si l'impédance terminale de la ligne est nulle ($Z_l = 0$) en remplaçant dans l'équation (1. 40), $\Gamma = -1$ .L'onde se réfléchit avec un déphasage de π. La superposition des deux ondes donne un régime d'onde stationnaire pur.

4.4.3. Circuit ouvert

Si l'impédance terminale de la ligne est infinie ($Z_l = \infty$) en remplaçant dans l'équation (1. 40), $\Gamma = 1$ .L'onde se réfléchit sans déphasage. La superposition des deux ondes donne aussi un régime d'onde stationnaire pur.